ÁLGEBRA LINEAR

2º Semestre de 2012 MA327A, B e C

Nome: Gabarito RA: ____________

Terceira Prova (29/Novembro)

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Total

1. Seja $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ simétrica, com autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = 4$.

(a) (1.0) Se $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$ são autovetores associados a λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente, encontre um autovetor v_4 associado a λ_4.

(b) (1.0) Calcule $A.\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

a) Como $A = A^T$ e os autovalores são <u>distintos</u> então os autovetores são ORTOGONAIS : $Av_j = \lambda_j v_j$, $j = 1,2,3,4$

e $v_4 \perp v_j$, $j = 1,2,3$

$v_4 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ e $v_4 \perp v_1 \Rightarrow a+b+c+d=0$

$v_4 \perp v_2 \Rightarrow a+b-c-d=0$

$v_4 \perp v_3 \Rightarrow a-b+c-d=0$

SL. HOMOGÊNEO

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix} \begin{matrix}\times(-1)\ \times(-1)\\ \oplus \\ \oplus\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&-2\\0&-2&0&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \div(-2)\\ \div(-2)\end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}a=d\\b=-d\\c=-d\end{matrix}}$$

$$\therefore \boxed{v_4 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}}$$

b) $Av = ?$, $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 \Rightarrow \langle v_i, v\rangle = \sum_{j=1}^{4} a_j \langle v_j, v_i\rangle = a_i\langle v_i, v_i\rangle$

$\therefore a_i = \dfrac{\langle v_i, v\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{4} \dfrac{\langle v_i, v\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i$ e então

$$Av = \sum_{i=1}^{4} \frac{\langle v_i, v\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} Av_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{\langle v_i, v\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} \lambda_i v_i$$

$$= 1\cdot\frac{1}{4}v_1 + 2\cdot\frac{1}{4}v_2 + 3\cdot\frac{1}{4}v_3 + 4\cdot\frac{1}{4}v_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/2\\-1\\-1/2\\0\end{pmatrix}$$

2. (1.5) Sejam x e y números reais positivos. Use a *desigualdade de Cauchy-Schwarz* para mostrar que a média geométrica, $\sqrt{xy}$, é menor ou igual à média aritmética, $\dfrac{x+y}{2}$.

$x, y > 0$ (números reais positivos

Sejam $u = (\sqrt{x}, \sqrt{y})$ e $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \in \mathbb{R}^2$

Cauchy-Schwarz: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$

$\Rightarrow \langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ (1)

Então $\langle u, v\rangle^2 = (1+1)^2 = 4$ (2)

$\|u\|^2 = x + y$ (3)

$\|v\|^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy}$ (4)

(2), (3) e (4) em (1) nos dá

$$4 \leq (x+y)\frac{(y+x)}{xy}$$

$$4xy \leq (x+y)^2$$

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

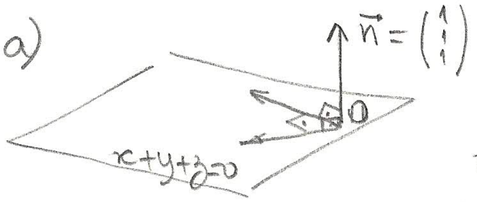
$$\boxed{\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}}$$ //.

obs: Outra possibilidade:
Definir $u = (\sqrt{x}, \sqrt{y})$ e $v = (\sqrt{y}, \sqrt{x}) \in \mathbb{R}^2$
pois então $\|u\|^2 = x + y = \|v\|^2$ e $\langle u, v\rangle = 2\sqrt{xy} \Rightarrow \langle u, v\rangle^2 = 4xy$
e de (1) $4xy \leq (x+y)^2 \Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

3. (a) (1.0) Encontre uma base ortonormal $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ (com o produto interno usual) tal que $\{u_1, u_2\}$ seja uma base para o plano $x + y + z = 0$.

(b) (1.0) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a reflexão em relação ao plano $x + y + z = 0$. O operador T é *auto-adjunto*? Justifique!

a)



$$\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \boxed{u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow z = -x - y$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

portanto o plano é gerado por $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aplicando Gram-Schmidt nestes 2 vetores obteremos a base ortonormal desejada para o plano:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\|w_1\| = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|w_2\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore \boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}, \quad \boxed{u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}$$

e $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ é a base procurada.

b) Sendo α base ortonormal para $\mathbb{R}^3$

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

o operador reflexão é tal que $Tu_1 = u_1$, $Tu_2 = u_2$ e $Tu_3 = -u_3$.

Logo $[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, matriz simétrica,

portanto $[T^*]^{\alpha}_{\alpha} = [T]^{\alpha}_{\alpha}$ ou seja, T é auto-adjunta.

OBS Para Questão 3

Os vetores da base α compõem as colunas de uma matriz ortogonal P:

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = [I]^{\alpha}_{can},$$

que pode ser interpretada como uma matriz de mudança de base, da α p/ a canônica de $\mathbb{R}^3$

Sendo ortogonal, $P^{-1} = P^T = [I]^{can}_{\alpha}$

Assim

$$[T]^{can}_{can} = [I]^{\alpha}_{can} [T]^{\alpha}_{\alpha} [I]^{can}_{\alpha}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left[T(x,y,z)\right]_{can} = [T]^{can}_{can} \left[(x,y,z)\right]_{can} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$T(x,y,z) = \left(\frac{x-2y-2z}{3}, \frac{-2x+y-2z}{3}, \frac{-2x-2y+z}{3} \right)$$

4. Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_1$ munido do produto interno da integral, $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$.

(a) (1.0) Usando o *processo de Gram-Schmidt*, encontre uma base ortonormal de $\mathcal{P}_1$ a partir da base $\{t, 1+t\}$ de $\mathcal{P}_1$.

(b) (1.0) Considere o funcional linear φ sobre $\mathcal{P}_1$ definido por $\varphi(p) = p(2) - 2p(0)$. Determine $u(t) \in \mathcal{P}_1$ tal que $\varphi(p) = \langle p, u\rangle$, para todo $p \in \mathcal{P}_1$.

(c) (1.0) Considere $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ definido por $T(a+bt) = b/\sqrt{3} + \sqrt{3}at$. O operador T é *unitário*? Justifique!

a) $\alpha = \{t, 1+t\}$

$p_1 = t$

$p_2 = 1+t - \dfrac{\langle 1+t, t\rangle}{\langle t, t\rangle} t \overset{①②}{=} 1+t - \dfrac{5/6}{1/3} t = 1+t - \dfrac{5}{2}t = 1 - \dfrac{3}{2}t$.

$\langle 1+t, t\rangle = \int_0^1 (1+t)t\,dt = \left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$ ①

$\langle t, t\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \dfrac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{3}$ ②

$\langle 1-\frac{3}{2}t, 1-\frac{3}{2}t\rangle = \int_0^1 (1-\frac{3}{2}t)^2 dt = -\dfrac{2}{3}\dfrac{(1-\frac{3}{2}t)^3}{3}\Big|_0^1 = -\dfrac{2}{9}\left(-\dfrac{1}{8} - 1\right) = \dfrac{1}{4}$ ③

$\|p_1\| = \sqrt{\langle t,t\rangle} \overset{②}{=} \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\|p_2\| = \sqrt{\langle 1-\frac{3}{2}t, 1-\frac{3}{2}t\rangle} \overset{③}{=} \dfrac{1}{2}$

$\therefore \boxed{\beta = \{\sqrt{3}t, 2-3t\}}$ é a base procurada

b) $\varphi : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$

$p \mapsto \varphi(p) = p(2) - 2p(0)$

$\left.\begin{array}{l} p(t) = a+bt \\ p(0) = a \\ p(2) = a+2b \end{array}\right\} \varphi(p) = a + 2b - 2a = 2b - a$ ④

Seja $u(t) = c + dt$

$\varphi(p) = \langle p, u\rangle = \int_0^1 (a+bt)(c+dt)\,dt = \int_0^1 (ac + (bc+ad)t + bdt^2)dt$

$= \left(act + (bc+ad)\dfrac{t^2}{2} + bd\dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = ac + \dfrac{bc+ad}{2} + \dfrac{bd}{3} =$

$= a\left(c + \dfrac{d}{2}\right) + b\left(\dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{3}\right) \overset{④}{=} -a + 2b$

$\therefore \begin{cases} c + \dfrac{d}{2} = -1 \\ \dfrac{c}{2} + \dfrac{d}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1/3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times -1/2 \\ \oplus \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/12 & 5/2 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{d = 30} \Rightarrow \boxed{c = -16}$

$\therefore \boxed{u(t) = -16 + 30t}$

cont. 4

c) $T(a+bt) = \frac{b}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,at$; $p(t)=a+bt$, $q(t)=c+dt$

$$\langle T(a+bt), T(c+dt)\rangle = \int_0^1 \left(\frac{b}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}at\right)\left(\frac{d}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}ct\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{bd}{3} + (bc+ad)t + 3act^2\right) dt$$

$$= \left(\frac{bd}{3}t + \frac{bc+ad}{2}t^2 + act^3\right)\Big|_0^1 = \frac{bd}{3} + \frac{bc+ad}{2} + ac \quad (1)$$

$$\langle a+bt, c+dt\rangle = \int_0^1 (a+bt)(c+dt)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(ac + (bc+ad)t + bdt^2\right) dt$$

$$= \left(act + \frac{bc+ad}{2}t^2 + \frac{bdt^3}{3}\right)\Big|_0^1 = ac + \frac{bc+ad}{2} + \frac{bd}{3} \quad (2)$$

ou seja, $\langle T(p), T(q)\rangle = \langle p, q\rangle$

$$= \langle p, Iq\rangle = \langle p, T^*Tq\rangle$$

$\therefore T^*T = I$ e T é unitária

Outras maneiras de resolver:

1ª) Utilizando a base $\alpha = \{\sqrt{3}t, 2-3t\}$ ortonormal encontrada no item a e aplicando T dada nos vetores de α:

$$T(\sqrt{3}t) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}.0t = 1$$

$$T(2-3t) = -\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}.2t = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}t$$

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{bmatrix} [T(\sqrt{3}t)]_\alpha & [T(2-3t)]_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, \sqrt{3}t\rangle & \langle -\sqrt{3}+2\sqrt{3}t, \sqrt{3}t\rangle \\ \langle 1, 2-3t\rangle & \langle -\sqrt{3}+2\sqrt{3}t, 2-3t\rangle \end{bmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = A \longrightarrow$$

resolvendo as integrais correspondentes

matriz ORTOGONAL pois $\det A = -1$ então $A^{-1} = A^T$. Como A é também simétrica $(A = A^T)$ então $A^{-1} = A$ (corresponde a uma reflexão plana) $\therefore$ T é unitária.

cont. 4) outras maneiras de resolver item c

2ª) Usando a base canônica de $\mathcal{P}_1$: $can = \{1, t\}$

$T(1) = \sqrt{3}\, t = 0.1 + \sqrt{3}\, t$

$T(t) = 1/\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} . 1 + 0.t$

$$\therefore \left[T\right]_{can}^{can} = \left[[T(1)]_{can} \quad [T(t)]_{can} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = B$$

note que B não é uma matriz simétrica, mas isso não significa nada, já que $\{1, t\}$ não é base ortonormal com o produto interno da integral (de fato, $\langle 1, t\rangle = 1/2$ e $\langle t, t \rangle = 1/3$).

Como $\det B = -1$, B é não singular.

Calculando B^{-1} vemos que $B^{-1} = B$

portanto $T^{-1}(p) = T(p) \Rightarrow T \circ T^{-1} = T \circ T$

Observe que $T(T(1)) = T(\sqrt{3}t) = 1$

e $T(T(t)) = T(1/\sqrt{3}) = t$

$\therefore T^2 = T \circ T = T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = I$

e T é unitária.

5. Considere o espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ munido do produto interno do traço, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$, e o subespaço $S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d = a, c = -b\right\}$.

(a) (1.0) Calcule uma base ortonormal para $S^\perp$.

(b) (1.5) Escreva a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$ na forma $A = A_1 + A_2$, em que $A_1 \in S$ e $A_2 \in S^\perp$.

a) $A \in S \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix} \therefore S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]$

$S^\perp = \{B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \langle A, B\rangle = 0, \forall A \in S\}$

sejam $A \in S$ e $B \in S^\perp \Rightarrow B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w\end{pmatrix}$

$\langle A, B\rangle = tr(B^t A) = tr\left(\begin{pmatrix} x & z \\ y & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} ax - bz & bx + az \\ ay - bw & by + aw\end{pmatrix}$

$= ax - bz + by + aw = a(x+w) + b(y-z) = 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Logo $w = -x$ e $z = y$ $\therefore B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x\end{pmatrix}$

$\Rightarrow S^\perp = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$, chamando $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

vemos que $\langle v_1, v_2\rangle = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0$

ou seja, os geradores de $S^\perp$ já são ortogonais.

Normalizando:

$\langle v_1, v_1\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2 = \|v_1\|^2$

$\langle v_2, v_2\rangle = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2 = \|v_2\|^2$

$\therefore$ $\boxed{\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\right\} \text{ é base ortonormal para } S^\perp.}$

b) Como $S \oplus S^\perp = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, todo elemento A de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ pode ser escrito de maneira única $A = A_1 + A_2$ com $A_1 \in S$ e $A_2 \in S^\perp$

Usando a base ortonormal $\beta = \{u_1, u_2\}$:

$A_2 = a_1 u_1 + a_2 u_2 = \langle A, u_1\rangle u_1 + \langle A, u_2\rangle u_2$

$a_1 = tr(u_1^T A) = tr\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ -3/\sqrt{2} & -4/\sqrt{2}\end{pmatrix} = -3/\sqrt{2}$

$a_2 = tr(u_2^T A) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} = tr\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2}\end{pmatrix} = 5/\sqrt{2}$

$\therefore \boxed{A_2} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3/2 & 5/2 \\ 5/2 & 3/2\end{pmatrix} \in S^\perp}$

e $\boxed{A_1} = A - A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/2 & 5/2 \\ 5/2 & 3/2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & 5/2\end{pmatrix} \in S.}$