Soluções.

1) Como $f \in C^1$ então sabemos que a dependência em x_0 e em λ é diferenciável. Descreveremos essa dependência. Suponha inicialmente, como fizemos em aula que a EDO não depende de λ, i.e. $x' = f(x)$. Precisamos então descrever a diferencial

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0) : T_{x_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\varphi(t,x_0)}\mathbb{R}^n$$

O teorema da dependência diferenciável diz que dado $v_0 \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$,

se $v_t = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0)\right) \cdot v_0$ então $\dot{v}_t = \left(D_{\varphi(t,x_0)} X\right) v_t$.

Para introduzir o parâmetro λ, usaremos a descrição acima, mas com o espaço de estados estendido $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, com λ fixo no tempo: $(\dot{x}_t, \dot{\lambda}_t) = F(x_t, \lambda_t) = (f(x_t, \lambda_t), 0)$.

Assim, aplicando o caso anterior, se $(v_0, w_0) \in T_{(x_0,\lambda_0)}\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$

e $(v_t, w_t) = \frac{\partial \varphi(t, (x_0, \lambda_0))}{\partial (x_0, \lambda_0)} (v_0, w_0)$ então

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_t \\ \dot{w}_t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} w_t \equiv w_0 \\ \dot{w}_t \equiv 0 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\boxed{\dot{v}_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(\varphi(t,x,\lambda_0),\lambda_0\right)\right) v_t + \frac{\partial f}{\partial \lambda}\left(\varphi(t,x,\lambda_0),\lambda_0\right)\cdot w_0}$$

No exemplo $x' = \lambda x$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \quad \forall x$ e

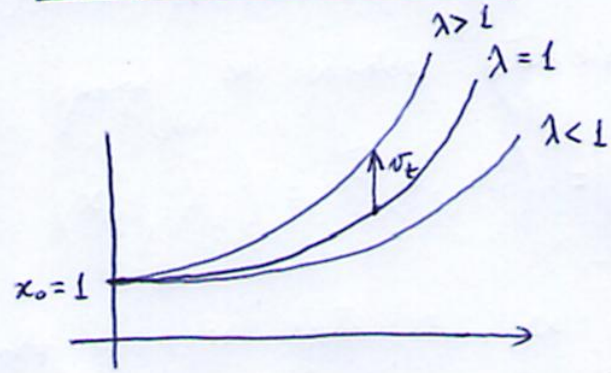
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}\left(\varphi(t,x,\lambda_0),\lambda_0\right) = \varphi(t,x,\lambda_0) = x_t .$$

Então $\dot{v}_t = \lambda v_t + x_t$. Digamos que $\lambda_0 = x_0 = 1$,

então $x_t = \varphi(t,x_0,\lambda_0) = e^t$ e $\boxed{\dot{v}_t = v_t + e^t w_0}$

cuja solução é $\boxed{v_t = e^t v_0 + t e^t w_0}$. Por exemplo, fixando

x_0 e variando λ:



$\boxed{v_t = t e^t \cdot w_0}$ o que confirma com $\frac{\partial \varphi(t,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda t} = t e^{\lambda t}$

$(v_0 \equiv 0)$

(Fim da Questão 1)

<u>Questão 2</u>. (Teorema da Subvariedade Estável). Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixo hiperbólico de $x' = X(x)$, com campo $X \in C^1$, E^s é o subespaço correspondente aos autovalores com parte real negativa de $D_{x_0}X$ e E^u é o subespaço correspondente aos autovalores com parte real positiva ($E^s \oplus E^u = \mathbb{R}^n$) então existe um aberto de x_0 onde existem as subvariedades estável S e instável $\mathcal{U}$ tais que $\varphi_t(S) \subseteq S$ para $t \geq 0$, $\varphi_t(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$ para $t \leq 0$, $E^s = T_{x_0}S$, $E^u = T_{x_0}\mathcal{U}$. $\forall x \in S$ temos que

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = x_0,$$

e $\forall x \in \mathcal{U}$,

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = x_0.$$

<u>Principais etapas da demonstração</u>:

Seja $C \in Gl(n, \mathbb{R})$ uma matriz mudança de base tal que

$$D_{x_0}X = C A C^{-1} \quad \text{onde} \quad A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \quad \text{onde}$$

$$\begin{cases} P \text{ tem parte real de autovalores } < 0, \\ Q \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad > 0. \end{cases}$$

$$E^s = C \cdot \text{ger}\{e_1, \dots, e_k\} \quad \text{e} \quad E^u = C \cdot \text{ger}\{e_{k+1}, \dots, e_n\}.$$

Assuma que $x_0 = 0$, caso contrário componha com a translação T, com $T\tilde{x} = \tilde{x} - x_0$. Note que $DT = Id$ $\therefore$ não interfere na hiperbolicidade.

Considerando o sistema conjugado $y = C^{-1}x$, temos que $y' = C^{-1}X(Cy)$. Assim, separando a componente linear, podemos escrever

$$(*) \qquad y' = Ay + G(y) \qquad \text{com } G(0)=0 \text{ e } D_0G=0.$$

Dado um parâmetro $a = (a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \in \underset{\text{ltd}}{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$, considere a curva $u(t,a)$ dada por

$$u(t,a) = \begin{pmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a + \int_0^t \begin{pmatrix} e^{P(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G(u(s,a))\,ds - \int_t^{+\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Q(t-s)} \end{pmatrix} G(u(s,a))\,ds$$

1) Mostramos que $u(t,a)$ é uma solução de $(*)$

2) Mostramos que $u(t,a) \to 0$ quando $t \to +\infty$ ($\therefore$ $u(t,a)$ são candidatos a serem pontos de S)

3) Define as funções $\psi_j(a_1, \dots, a_k) = u^j(0, (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0))$, $j = k+1, \dots, n$.

4) O gráfico de $(a_1, \dots, a_k) \longmapsto (\psi_{k+1}, \dots, \psi_n)$ é invariante pelo fluxo, converge para 0 quando $t \to +\infty$ e tangencia o espaço horizontal $\mathbb{R}^k$.

Portanto, a subvariedade S é esse gráfico.

<u>Obs</u>: 1) Voltamos à equação original em x via conjugação por C.

2) Para a subvariedade instável, usamos a mesma demonstração para $x' = -X(x)$.

$\blacksquare$

(FIM da questão 2)

<u>Questão 3</u>: Seja S uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$, $\dim S = 1$ passando pela origem, invariante por φ_t, o fluxo de X. Tome $v_0 \in T_0 S$ e uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ dif. tal que $\dot{\gamma}(0) = v_0$. O fluxo φ_t leva a curva $\gamma(s)$ na curva $\varphi_t(\gamma(s))$ cuja derivada em s $\left.\frac{d}{ds}\varphi_t(\gamma(s))\right|_{s=0} = D_0\varphi_t(v_0)$ por definição. Chamando $v_t = D_0\varphi_t(v_0)$, sabemos que, por linearização,

$$\dot{v}_t = (D_0 X)\cdot v_t .$$

Assim, como S é invariante, $\varphi_t(\gamma(0)) = 0$ e $\dim S = 1$ então $v_t \in T_0 S \quad \forall t \in \mathbb{R}$, portanto v_0 está em uma direção invariante de $(D_0 X)$, i.e. $T_0 S$ é uma espaço de autovetores de $D_0 X$.

Se φ_t contrai S para a origem então

$$\left| \left.\frac{d}{ds}\varphi_t(\gamma(s))\right|_{s=0} \right| \leq \left| \left.\frac{d}{ds}\gamma(s)\right|_{s=0} \right|$$

i.e autovalor de $D_0\varphi_t \leq 1 \iff$ autovalor de $D_0 X \leq 0$ na direção de v_0.

Analogamente, se φ_t expande S, $(D_0 X)\, v_0 = \lambda_0 v_0$ com $\lambda_0 \geq 0$.

b) Digamos que S^1, S^2 e S^3 são subvariedades de dimensão 1, invariantes pelo fluxo, com S^1, S^2 contraindo e S^3 expandindo. Tome $\lambda_1 \in T_0 S^1$, $\lambda \in T_0 S^2$ e $v_3 \in T_0 S^3$.

Se $A = D_0 X$ então pelo item A temos que

$$\begin{cases} A v_1 = \lambda_1 v_1 & \text{com } \lambda_1 \leq 0 \\ A v_2 = \lambda_2 v_2 & \text{com } \lambda_2 \leq 0 . \end{cases}$$

Como v_1 e v_2 são l.i., a forma de Jordan de A é

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{com } \lambda_1, \lambda_2 \leq 0.$$

Mas $A v_3 = \lambda_3 v_3$, com $\lambda_3 \geq 0$, com v_3 l.i. de v_1 e de v_2. Portanto, a única possibilidade para a forma de Jordan é com $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (e portanto $\lambda_3 = 0$).

Concluímos que $A = D_0 X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\blacksquare$

(fim da Questão 3)

<u>Questão 4</u>. Lema de Gronwall: Se $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas e não negativas e $u(t) \leq \alpha + \int_0^t u(s)\, v(s)\, ds$ $(\alpha \geq 0)$ então $u(t) \leq a\, e^{\int_0^t v(s)\, ds}$.

<u>Dem</u>: Se $\alpha > 0$, tome $w(t) = \alpha + \int_0^t u(s)\, v(s)\, ds$. Então $w(t)$ é derivável e $w'(t) = u(t)\, v(t) \leq w(t)\, v(t)$. Então

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq v(t) \qquad \left(w(t) > 0 \text{ porque } w(a) = \alpha \text{ e } w' > 0\right)$$

$$\Downarrow$$

$$w(t) \leq w(a)\, e^{\int_a^t v(s)\, ds}.$$

$\square/2$

Se $\alpha = 0$, use o caso anterior com $\alpha = \varepsilon$ e faça $\varepsilon \searrow 0$ $\blacksquare$

Dada uma EDO em $\mathbb{R}^n$: $x' = f(t,x)$ com o campo f K-Lipschitz na segunda coordenada então as soluções começando $(t = t_0)$ em x_0 e y_0 satisfazem:

$$\left|\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0)\right| = \left|x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s,t_0,x_0)) - f(s,\varphi(s,t_0,y_0))\, ds\right|$$

$$\leq |x_0 - y_0| + \int_{t_0}^t K\, \left|\varphi(s,t_0,x_0) - \varphi(s,t_0,y_0)\right| ds$$

$\therefore$ se $t > t_0$, o resultado segue pelo lema de Gronwall acima tomando $\alpha = |x_0 - y_0|$, $u = |\varphi(t,t_0,x_0) - \varphi(t,t_0,y_0)|$ e $v \equiv K$.

Se $t < t_0$, reverta o tempo da equação para que o gráfico da solução fique o simétrico por, i.e., espelhado na reta vertical t_0. Para isso, use o resultado acima com o campo $-f(t_0 - (t - t_0), \underbrace{}_{x})$. Note que para t perto de t_0, $(t_0 - (t - t_0), x)$ também estará no domínio da f, se (t_0, x) o estiver.

Se existir $k > 0$ t.q. $k|x-y| \leq |f(t,x) - f(t,y)|$, nada pode ser dito sobre como se afastam as soluções de x_0 e y_0.

Por exemplo, se $x \in \mathbb{R}^2$ e $f(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x \quad \forall t$.

então o fluxo $\varphi(t, t_0, x_0) = \begin{pmatrix} \cos(t-t_0) & -\operatorname{sen}(t-t_0) \\ \operatorname{sen}(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{pmatrix} \cdot x_0$ é uma rotação em $\mathbb{R}^2$. Assim, $\forall$ par x_0, y_0

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0)| \equiv |x_0 - y_0| \qquad \forall t.$$

E, $|f(t,x) - f(t,y)| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (x-y) \right| = |x-y|$

$\blacksquare$

(FIM DA QUESTÃO 4)

<u>Questão 5</u>. Seja X um campo de vetores em M e $\Psi: M \to M$ um difeomorfismo. Se φ_t é o fluxo (local) de X então $\Psi \circ \varphi_t$ é o fluxo de $d\Psi(X)$. De fato

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi \circ \varphi_t(x_0)\right) = d_{\varphi_t(x_0)}\Psi\left(\frac{d}{dt}\left(\varphi_t(x_0)\right)\right) = d_{\varphi_t(x_0)}\Psi\left(X(\varphi_t(x_0))\right)$$

Portanto Ψ conjuga o fluxo de X com o fluxo de $d\Psi(X)$.

Se $X = d\Psi(X)$, ie, se os fluxos são iguais, a expressão da conjugação fica

$$\varphi_t = \Psi^{-1}\varphi_t\Psi \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Portanto Ψ comuta com φ_t para todo $t \in \mathbb{R}$. ∎

<u>Exemplos</u>: 1) Campos lineares $x' = Ax$. Se $B \in Gl(n,\mathbb{R})$ e comuta com A então $Be^{At} = e^{At}B$.

2) $X(x,y) \equiv \vec{e}_1$ em $\mathbb{R}^2$ e $\Psi(x,y) = (x+a, y+b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

3) Fluxo Norte-Sul na esfera S^2 e Ψ = rotação por θ no eixo z.

4) etc... ∎