1ª Prova 07/abril/2010

Gabarito.

1) Vamos assumir que a solução fundamental está iniciada na identidade $\varphi(0) = Id_{2\times 2}$. Então o que está sendo pedido é que $\varphi(2) = P \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ onde $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

A matriz $\tilde{\varphi}(2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ pode ser obtido, conforme visto em aula, pelos coeficientes

$$\tilde{A}(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \begin{pmatrix} \log 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{se } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

i.e. temos que $\tilde{\varphi}(t)' = \tilde{A}(t)\,\tilde{\varphi}(t)$. Portanto os coeficientes $A(t)$ procurados podem ser $A(t) = P\,\tilde{A}(t)\,P^{-1}$.

<u>Continuidade de $A(t)$</u>: Temos o teorema de existência e unicidade no caso de A ser constante. No caso de $A(t)$ ser constante por partes temos também garantida solução única por composição:

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{tA_1} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ e^{(t-1)A_2}\, e^{A_1} & \text{se } 1 < t \leq 2 \end{cases} \quad \text{onde } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} \log 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) a) Defina $A(t) := \varphi'(t)\,\varphi(t)^{-1}$ que é, naturalmente, contínua.

Obviamente $\varphi'(t) = A(t)\,\varphi(t)$ $\therefore$ $\varphi(t)$ é uma solução fundamental.

Se $\varphi' = \tilde{A}(t)\,\varphi \Rightarrow \tilde{A}(t) = \varphi'\varphi^{-1} \Rightarrow$ unicidade de $A(t)$.

O determinante de $\varphi(t)$ não precisa se positivo. Se quisermos outra solução fundamental na componente conexa da identidade de $Gl(n,\mathbb{R})$, por exemplo, com $\psi(0) = Id$, basta tomarmos $\psi(t) = \varphi(t)\,\varphi(0)^{-1}$.

b) Use $\varphi(t) = e^{tA}e^{tB}$ no item (a) acima. então

$\varphi(0) = Id$ e é solução fundamental de $x' = A(t)\,x$

com $A(t) = A + e^{tA}Be^{-tA}$.

Se $\psi(t) = e^{t(A+B)}$ então $\psi' = (A+B)\psi$ e $\psi(0) = Id$.

Precisamos mostrar que $A + e^{tA}Be^{-tA} = A+B \iff [A,B] = 0$

$(\Rightarrow)$ $e^{tA}Be^{-tA} = B \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{tA}Be^{-tA}\right) = 0 \Rightarrow e^{tA}(AB-BA)e^{-tA} = 0$

$\Rightarrow AB = BA$.

$(\Leftarrow)$ Se A e B comutam então B comuta com e^{tA} $\therefore$ $e^{tA}Be^{-tA} = B$

$\blacksquare$

3) A segunda igualdade vale porque $\frac{t^2}{2}[B,A]$ comuta com $t(A+B)$ por hipótese.

Aplicando o item (2a), já que em $t=0$ ambos os lados da equação são a 1d, basta verificar que tem as mesmas matrizes de coeficientes $A(t)$. De fato

$$\varphi(t) = e^{tA} e^{tB} \Longrightarrow A(t) = A + e^{tA} B e^{-tA}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = e^{t(A+B) + \frac{t^2}{2}[B,A]} \Longrightarrow \tilde{A}(t) = A + B + t[B,A]$$

Vamos mostrar que se $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ então $A(t) = \tilde{A}(t)$.

Precisamos verificar que $e^{tA} B e^{-tA} = B + t[B,A]$.

Derivando o lado esquerdo em relação a t:

$$e^{tA}(AB - BA)e^{-tA} = e^{tA}[B,A]e^{-tA} = [B,A]$$

já que e^{tA} e $[B,A]$ comutam. Por outro lado em $t=0$ o lado esquerdo é B. A fórmula segue pelo teorema fundamental do cálculo. $\blacksquare$

<u>Questão 4</u>: $B_b(x_0)$ denota a bola fechada, raio $b>0$, centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

<u>Teorema de Peano</u>: Seja $f: [t_0-a, t_0+a] \times B_b(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua com $|f| < M$. Então o problema de Cauchy $x' = f(t,x)$ com $x(t_0) = x_0$ tem pelo menos uma solução com t no intervalo

$$[t_0-a, t_0+a] \cap [t_0 - b/M, t_0 + b/M].$$

<u>Dem</u>: Seja f_n uma sequência de funções t.q. $f_n \xrightarrow{unif} f$ em $[t_0-a, t_0+a] \times B_b(x_0)$ e lipschitzianas na 2ª coordenada (por exemplo f_n polinomial, cuja existência esta garantida pelo teorema de Weierstrass).

Seja $\varphi_n(t)$ as soluções dos respectivas equações $x' = f_n(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, cuja existência e unicidade estão garantidas pelo teorema de Picard. $\varphi_n(t)$ são uniformemente limitas porque $|\varphi_n(t) - x_0| < b$ e equicontínuas porque

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| \leq \int_s^t |f_n(u, \varphi_n(u))| du \leq (M+1)|t-s|$$

Portanto, pelo teorema de Ascoli-Arzela, $\exists$ subsequência $\varphi_{n_k} \longrightarrow \varphi$ uniformemente.

Vamos mostrar que φ é solução de $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$.

De fato,

$$f_{n_k}(t, \varphi_{n_k}(t)) \xrightarrow{\text{unif.}} f_{n_k}(t, \varphi(t)) \xrightarrow{\text{unif}} f(t, \varphi(t))$$

porque é Lipschitz na 2ª coordenada

por construção

Logo, tomando o limite nos dois lados de

$$\varphi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_{n_k}(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds ,$$

obtemos que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds .$$

Obviamente $\varphi(t_0) = x_0$

$\blacksquare$

O argumento acima <u>não funciona em dimensão infinita porque a bola $B_b(x_0)$ neste caso não é compacta</u>, como exigido pelo teorema de Ascoli-Arzelá.

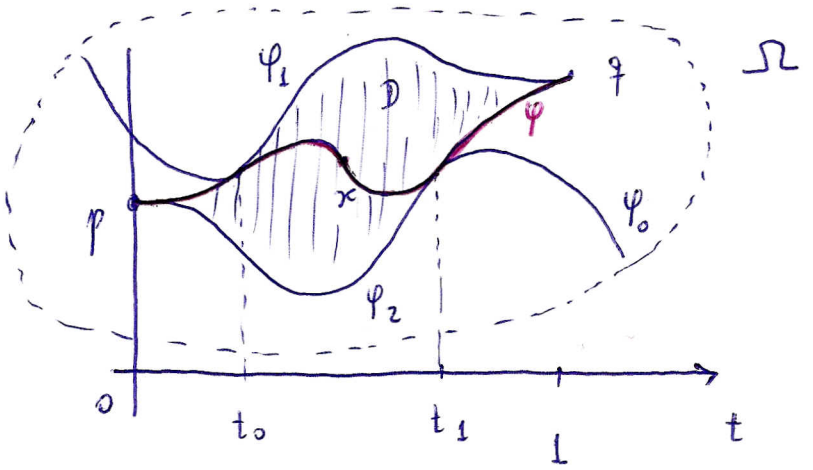
(ver PDF em anexo)

<u>Obs</u>: De fato a validade do resultado do Teorema de Peano caracteriza espaços de dimensão finita. Ver (as referências em)

Papageorgiou, N.S. "Kneser theorem for differential equations in Banach Spaces". Bull. Austral. Math. Soc. (1986) 419-434.

Godunov, A.N. "Peano's theorem in Banach Spaces". Funct. Anal. Appl. (1975), 53-55

5)



Considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo $\overline{D}$.

Qualquer solução φ_0 passando por x se aproxima de $\partial\Omega$, portanto necessariamente passa por ∂D que é a união dos gráficos de φ_1 e φ_2. Sem perda de generalidade, digamos que uma solução dessas, digamos φ_0, intersecta ∂D em $(t_0, x_0) \in \text{graf}(\varphi_1)$ e em $(t_1, x_1) \in \text{graf}(\varphi_2)$ como na figura. Obviamente se $t_0 = 0$ então $x_0 = p$ e se $t_1 = 1$ então $x_1 = q$.

Como a concatenação de soluções também é solução, tome

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{se } t \leq t_0 \\ \varphi_0(t) & \text{se } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \varphi_2(t) & \text{se } t \geq t_1 \end{cases}$$

Então $\varphi(t)$ satisfaz as condições da solução procurada. $\blacksquare$