2a. Lista de Exercícios

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
junho de 2010

Teorema de Poincaré-Bendixson

1. Mostre que se o conjunto limite $L_\omega(x)$ de todo ponto x de um sistema dinâmico é fechado.

2. O conjunto limite $L_\omega(x)$ pode pertencer ou não ao domínio do campo de vetores de um sistema $x' = X(x)$ em uma variedade M. Dê exemplos onde $L_\omega(x)$ não é limitado, com $L_\omega(x)$ fora do domínio do campo (no seu fecho), e com $L_\omega(x)$ no interior do domínio.

3. Se $L_\omega(x)$ for compacto então ele é conexo. Dê um exemplo de retrato de fase onde $L_\omega(x)$ não é compacto nem conexo

4. Verifique que fluxo irracional no toro T^2, i.e. $\varphi_t(x, y) = (x + t, y + \alpha t) \bmod \mathbf{Z}^2$, com α irracional é tal que para todo ponto p do toro, $L_\alpha(x) = L_\omega(x) = T^2$.

5. Se X é um conjunto invariante compacto maximal com essa propriedade, i.e., não contém subconuntos próprios invariantes então

   a) Toda trajetória em X é densa em X.

   b) Para todo $x \in X$, $L_\alpha(x) = L_\omega(x) = X$.

6. Seja X um conjunto invariante fechado de um fluxo completo φ_t em $\mathbb{R}^n$. Se para todo $x \in X$, $L_\alpha(x) = L_\omega(x) = X$ então X é compacto.

7. Do livro de Hirsh e Smale: página 247: 1,2,4. Página 253: 1-6.

8. Use o teorema de Poincaré-Bendixson para mostrar que o sistema $(x', y') = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$ tem pelo menos uma órbita periódica no anel $A = \{x \in \mathbf{R}^2; 1/2 < \|x\| < 2\}$. Identifique essa órbita e verifique se é ciclo limite estável (atrator de uma vizinhança dela), instável ou nem um dos dois casos.

9. Mais exercícios parecidos com esse acima no Perko, página 231.

Teorema de Hartman-Grobman

1. Suponha que um homeomorfismo da forma $h = I + u$ com u limitado na norma de C_b^0 conjuga um difeomorfismo f com sua linearização $A := d_{x_0} f$ no ponto fixo x_0 de f em um aberto limitado U. Mostre que se uma matrix inversível B comuta com A, então $\tilde{h} = I + \tilde{u}$, com $\tilde{u}(x) = (B - I) + u(Bx)$ também conjuga localmente f e A e $\tilde{u}$ também é limitado no aberto limitado U. Concluímos que a unicidade de h na forma $(I + u)$ garantida pelo Teorema de Hartman-Grobman (versão para difeomorfismos) só vale para conjugação global em domínio não-limitado.

2. Mostre que o conjunto de pontos fixos hiperbólicos de um difeomorfismo f é um conjunto discreto. Assim, se f for uma automorfismo de um espaço compacto, o conjunto de pontos fixos hiperbólicos é finito.

3. Compare as etapas principais do argumento que apresentamos para a demonstração do teorema de Hartman-Grobman com a demonstração do Perko, página 118.

4. Conclua a unicidade das subvariedades estáveis e instáveis de pontos fixos hiperbólicos do teorema da subvariedade estável usando o teorema de Hartman-Grobman.

Estabilidade de pontos de equilíbrio

1. Mostre com um exemplo que é possível uma EDO $x' = X(x)$ ter um ponto de equilíbrio x_0 tal que $\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = x_0$ para todo x, no entanto a diferencial $d_{x_0} X$ não tem autovalores negativos.

2. Do livro de Hirsh e Smale. Página 191: 2-6.

3. Do livro de Hirsh e Smale. Página 198: 1-6

4. Seja V uma função de Lyapunov para um ponto de equilíbrio x_0 assintoticamente estável de um sistema dinâmico. Tome $c > 0$ tal que $V^{-1}([0, c])$ é compacto e não contém nenhum outro ponto de equilíbrio. Verifique que $V^{-1}([0, c])$ está contido na bacia de atração de x_0.

Sistemas Hamiltonianos e Gradientes

1. Exercícios do Perko, Seção 2.12, página 159: 1-8, 11,12.

Bifurcações 1. Dê um exemplo de uma família de campos de vetores de classe C^1 parametrizados continuamente por $\mu \in \mathbf{R}$ tal que o fluxo associado aos campos, variando μ, atravessa classes distintas de estabilidade estrutural.

Bifurcações 2. Apresente pelo menos mais 3 exemplos como acima, com pelo menos uma das famílias gerando órbitas periódicas em $\mathbf{R}^2$ (bifurcação de Hopf).