Capítulo 4

Teorema de Poincaré-Bendixson

4.1 Preliminares e demonstração do teorema

4.2 Aplicações

Considere um sistema dinâmico $x' = X(x)$ onde o campo X está definido em um aberto $U \subset \mathbf{R}^2$. Dada uma órbita periódica γ neste sistema, denotaremos por intγ ao interior da região delimitada por γ.

Teorema 4.1. *Seja $x' = X(x)$ um sistema em $U \subset \mathbf{R}^2$ um aberto do plano. Se existe uma órbita periódica γ desse sistema então em* intγ *existe uma singularidade de X.*

Uma demonstração, usando o Teorema de Poincaré-Bendixson é apresentada abaixo.
Primeira Demonstração: Para todo ponto x em intγ, pelo menos um dos conjuntos limites $L_\alpha(x)$ ou $L_\omega(x)$ são diferentes de γ. Para fixar as ideias, suponhamos que $L_\omega(x)$ esteja em intγ. Se $L_\omega(x)$ possuir um ponto fixo, então terminaria a demonstração. Se $L_\omega(x)$ não possuir ponto fixo, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, $L_\omega(x)$ é outra órbita periódica contida em intγ. Repetindo o argumento acima: 1) para outros pontos $x \in$ intγ e 2) para o interior dessa outra órbita periódica $L_\omega(x)$ concluímos que, ou encontra-se um ponto fixo (que terminaria a demonstração) ou em intγ existe uma infinidade de órbitas periódicas.

Denote por γ_λ, com $\lambda \in \Lambda$ a família de todas essas órbitas periódicas em intγ. Consideraremos pontos fixos como órbitas periódicas (de qualquer período $\epsilon > 0$), portanto (se existirem, que é o que queremos mostrar), estão incluídos no conjunto acima. Como órbitas periódicas não se intersectam, existe uma ordem parcial neste conjunto dada pela continência de seus interiores, i.e. $\gamma_{\lambda_1} \leq \gamma_{\lambda_2}$ se int$\gamma_{\lambda_1} \subset$ intγ_{λ_2}.

Mostraremos que toda cadeia neste conjunto parcialmente ordenado tem cota superior. De fato, dada uma cadeia $\{\gamma_\lambda, \lambda \in \Gamma \subset \Lambda\}$. Considere o conjunto não vazio dado pela intersecção de compactos encaixantes:

$$K = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} \text{int}\bar{\gamma}_\lambda.$$

Para todo $x \in K$, novamente, $L_\omega(x)$ e $L_\omega(x)$ tem pontos fixos (que é uma cota superior da cadeia), ou, pelo teorema de Poincaré-Bendixson, existe ainda outra órbita periódica $\gamma_x \subset K$. Essa órbita γ_x é uma cota superior da cadeia.

Pelo lema de Zorn, existe um elemento maximal $\tilde{\gamma}$ nesse conjunto, que não contém mais órbitas periódicas em seu interior. Assim, pelo mesmo argumento repetido acima

com pontos $x \in \text{int}\tilde{\gamma}$, para que $\tilde{\gamma}$ seja maximal, essa órbita é necessariamente um ponto fixo.

$\square$

Apresentamos abaixo uma segunda maneira de demonstrar esse teorema. Apesar do fato de que não mais usaremos o teorema de Poincaré-Bendixson (nem o lema de Zorn), essa demonstração também é interessante porque será verdadeira em dimensão maior. Basta que se tenhamos um conjunto invariante fechado homeomorfo a uma bola fechada; por exemplo, uma fronteira delimitando um aberto conexo A, com $A \cup \partial A$ invariante.

Segunda Demonstração: Como o fecho de intγ é homeomorfo à bola unitária fechada $B_1(0)$ em $\mathbf{R}^2$, fixemos h um homeomorfismo entre esses dois espaços. A aplicação $h \circ \varphi_t \circ h^{-1}$ é uma aplicação contínua de $B_1(0)$ nela mesma. Pelo teorema de ponto fixo de Brouwer, para cada t fixado, existe pelo menos um ponto $p_t \in B_1(0)$ tal que $h \circ \varphi_t \circ h^{-1}(p(t)) = p(t)$. Denotaremos por $P(t)$ o conjunto não vazio de todos esses pontos que são fixados por φ_t. Por continuidade de φ_t, o conjunto de seus pontos fixos $P(t)$ é fechado, portanto compacto.

Precisamos mostrar que existe pelo menos um $p_0 \in \bigcap_{t \in \mathbf{R}} P(t)$. Note que dado um certo $p \in P(t)$ então $p \in P(nt)$ para todo inteiro $n \in \mathbf{Z}$, i.e. $P(t) \subset P(nt)$. Assim, fixado um $t > 0$, considere a sequência de compactos encaixantes $P(t/2^n) \subset \ldots P(t/2) \subset P(t)$. Tome p_0 um elemento de $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} P(t/2^n)$. Então $\varphi_t(p_0) = p_0$ para todo t no conjunto dos diádicos da forma $m/2^n$, com m inteiro. Como os diádicos são densos em $\mathbf{R}$ e a trajetória de p_0 depende continuamente de t, segue que p_0 é um ponto fixo do sistema, portanto $X(p_0) = 0$.

$\square$