Capítulo 6

Teorema de Hartman-Grobman

Versão discreta.

Versão contínua.

O final da demonstração da versão discreta apresentada em aula (1o. semestre de 2010) precisa ser refeita:

Assuma por enquanto que Ψ é ϵ-globalmente Lipchitz. Temos então que o operador $S : C_b^0 \to C_b^0$ dado por $S = -\mathcal{L}\Psi(I + u)$ satisfaz:

$$\|Su_1 - Su_2\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a}\epsilon\|u_1 - u_2\|.$$

Portanto, se $\epsilon < \frac{1-a}{\|A^{-1}\|}$ então S é uma contração, como precismos mostrar. Por outro lado, se Ψ não for ϵ-globalmente Lipschitz com ϵ suficiente pequeno, então considere uma vizinhança aberta da origem U onde $\|d_x\Psi\| \leq k < \frac{1-a}{\|A^{-1}\|}$ para todo $x \in U$. Então pelo teorema do valor médio Ψ é ϵ-Lipchitz em U. Além disso, existe uma extensão da aplicação $\Psi\|_U$, denotada por $\tilde{\Psi}$ que é globalmente ϵ-Lipschitz tal que $\tilde{\Psi}\|_U = \Psi\|_U$. Portanto S é uma contração se considerarmos $\tilde{\Psi}$ ao invés de Ψ.

Assim, pelo teorema do ponto fixo de Banach, a semiconjugação $fh = hA$ vale para todo x em $h^{-1}(U) \cap h^{-1}(A^{-1}(U))$.

Teorema 6.1 (Hartman-Grobman, versão contínua)**.**

Demonstração: Para cada inteiro $n \neq 0$, a versão discreta do teorema de Hartman-Grobman garante que existe um homeomorfismo $h_{1/n}$ que conjuga o fluxo no tempo $t = 1/n$, $\varphi_{1/n}$ com $e^{\frac{1}{n}A}$. Por composição de $\varphi_{1/n}$ com ele mesmo quantas vezes for necessário e por cancelamento telescópico concluímos que para todo racional m/n temos que

$$\varphi_{m/n} = h_{1/n} \circ e^{\frac{m}{n}A} \circ h_{1/n}^{-1}.$$

Em particular, para $m = n$, temos, por unicidade de h (na forma $I + u$ com u limitado quando estendido para todo $\mathbf{R}^n$), que $h_{1/n} = h_1$. Denotaremos $H := h_1$. Como o argumento acima vale para todos os racionais, temos que para todo $t \in \mathbf{Q}$,

$$\varphi_t = H \circ e^{tA} \circ H^{-1}.$$

Se $t \in \mathbf{R}$ for irracional, considere uma sequência t_n de racionais convergindo para t. Então para todo $n \in \mathbf{N}$,

$$\varphi_{t_n} = H \circ e^{t_n A} \circ H^{-1}.$$

Pelas continuidades de φ_t, e^{tA} (relação ao tempo t) e de H em relação ao espaço, tomando-se o limite nos dois lados da equação, quando $n \to \infty$, temos que

$$\varphi_t = H \circ e^{tA} \circ H^{-1}.$$

para todo ponto x que esteja no domínio de H^{-1}.

$\square$

6.1 Exercícios

1. Suponha que um homeomorfismo da forma $h = I + u$ com u limitado na norma de C_b^0 conjuga um difeomorfismo f com sua linearização $A := d_{x_0} f$ no ponto fixo x_0 de f em um aberto limitado U. Mostre que se uma matrix inversível B comuta com A, então $\tilde{h} = I + \tilde{u}$, com $\tilde{u}(x) = (B - I) + u(Bx)$ também conjuga localmente f e A e $\tilde{u}$ também é limitado no aberto limitado U. Concluímos que a unicidade de h na forma $(I + u)$ só vale para conjugação global em domínio não-limitado.

2. Mostre que o conjunto de pontos fixos hiperbólicos um difeomorfismo f é um conjunto discreto. Assim, se f estiver definido em um compacto esse conjunto é finito.