3a. Prova

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
23 de junho de 2010

Escolha 4 dentre as 6 questões abaixo. Boa prova!

1. Considere dois campos de vetores diferenciáveis X e Y em $\mathbf{R}^n$. Se existem dois pontos $x, y \in \mathbf{R}^n$ tal que $X(x) = Y(y) = 0$ e os jacobianos $D_xX = D_yY$ são hiperbólicos, mostre que existe uma vizinhança U de x homeomorfa a uma vizinhança V de y tal que nessas vizinhanças os fluxos φ_t^X e φ_t^Y de X e de Y respectivamente são conjugados.

2. Explique em que contexto vale a unicidade da conjugação dada pelo teorema de Hartman-Grobman. Mostre como se obter outros homeomorfismos que conjugam os sistemas envolvidos.

3. Defina equivalência topológica e estabilidade estrutural. Dê um exemplo de dois sistemas que são topologicamente equivalentes mas não são conjugados. Dê dois exemplos de uma família de campos de vetores de classe C^1 parametrizados continuamente por $\mu \in \mathbf{R}$ tal que o fluxo associado aos campos, variando μ, atravessa classes distintas de estabilidade estrutural.

4. Use o teorema de Poincaré-Bendixson para mostrar que o sistema $(x', y') = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2))$ tem pelo menos uma órbita periódica no anel $A = \{x \in \mathbf{R}^2; 1/2 < \|x\| < 2\}$. Identifique essa órbita e verifique se é ciclo limite estável (atrator de uma vizinhança dela), instável ou nem um dos dois casos.

5. Dada uma função H diferenciável em $\mathbf{R}^2$, qual a relação entre as trajetórias do sistema gradiente e do sistema hamiltoniano gerado por H. No que diferem os pontos de equilíbrio? Dê um exemplo.

6. Transforme o "sistema newtoniano" $x'' + \operatorname{sen} x = 0$ em um sistema hamiltoniano e use a teoria apresentada no curso para esboçar o retrato de fase.