2a. Prova

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
19 de maio de 2010

Escolha 4 dentre as 5 questões abaixo. Boa prova!

1. Dada a equação diferencial $x' = f(x, \lambda)$, com $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ de classe C^∞. Explique e descreva como a solução $\varphi(t, x_0, \lambda)$ varia com x_0 e λ. Exemplifique no caso $n = k = 1$ e $x' = \lambda x$, quais são as equações diferenciais das transformações lineares $\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(t, x_0, \lambda)$ e de $\frac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(t, x_0, \lambda)$.

2. Descreva as etapas principais que usamos para demonstrar o teorema da subvariedade estável.

3. Considere a equação diferencial $x' = X(x)$ em $\mathbf{R}^n$ onde X é um campo de classe C^1 com $X(0) = 0$.

   a) Suponha que S, uma subvariedade de $\mathbf{R}^n$ de dimensão 1 passando pela origem, seja invariante pelo fluxo. Verifique que sua tangente na origem T_0S é uma direção de autovetores de D_0X. Além disso, se todo ponto de S converge para a origem quando $t \to +\infty$ então os autovalores associados são não-positivos. Analogamente, se todo ponto de S converge para a origem quando $t \to -\infty$ então os autovalores associados são não-negativos.

   b) Suponha que $n = 2$ e que pela origem passam 3 subvariedades invariantes pelo fluxo, duas contraindo para 0 e outra repelindo, tais que duas a duas seus espaços tangentes são l.i. Mostre que $D_0X = 0$.

4. Demonstre a desigualdade de Gronwall. Aplique essa desigualdade para mostrar que se K é a constante de Lipschitz (na variável espacial) de uma função contínua $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ então as soluções $\varphi(t, t_0, x_0)$ e $\varphi(t, t_0, y_0)$ da equação diferencial $x' = f(t, x)$ com condições iniciais x_0 e y_0, respectivamente, satisfazem a seguinte condição de limitação superior das distâncias:

$$|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0)| \leq e^{K|t-t_0|}|x_0 - y_0|.$$

Por outro lado, dê um exemplo de $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ contínua, onde existe $k > 0$ tal que

$$k|x - y| \leq |f(t, x) - f(t, y)|$$

para todo $(t, x), (t, y)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ e no entanto não temos uma limitação inferior das distâncias do tipo:

$$|x_0 - y_0|e^{k|t-t_0|} \leq |\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, y_0)|.$$

5. Seja X um campo de vetores em uma variedade diferenciável M e $\Psi : M \to M$ um difeomorfismo. Mostre que o campo X é invariante pelo difeomorfismo Ψ ($X = d\Psi(X)$) se e somente se seu fluxo φ_t comuta com Ψ para todo $t \in \mathbf{R}$. Dê um exemplo.