1a. Prova

MM456 Equações Diferenciais Ordinárias.
07 de abril de 2010

Escolha 4 dentre as 5 questões abaixo. Boa prova!

1. Verifique se existe uma equação diferencial linear $x' = A(t)x$ em $\mathbf{R}^2$, com $A(t)$ constante por partes que, de $t = 0$ até $t = 2$, leva simultaneamente: o ponto $(1, 3)$ em $(-2, -6)$ e o ponto $(3, -1)$ em $(-3, 1)$. Faça o mesmo para os pares de pontos: de $(1, 3)$ em $(3, -1)$ e $(3, -1)$ em $(1, 3)$.

   $A(t)$ precisa ser contínua para garantir a existência e unicidade de solução?

2. a) Seja $\varphi(t)$ uma família de matrizes não-singulares com diferivada contínua em todo $t \in \mathbb{R}$. Prove que existe uma única matriz $A(t)$ contínua tal que $\varphi(t)$ é uma solução fundamental. O determinante de $\varphi(t)$ precisa ser positivo?

   b) Use o item acima para mostrar que $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ se e somente se o colchete $[A, B] := BA - AB$ for zero.

3. Use o item (a) do exercício acima para mostrar que se $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ então

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}\ e^{\frac{t^2}{2}[B,A]} = e^{t(A+B)+\frac{t^2}{2}[B,A]}.$$

4. Demonstre o Teorema de Peano. Por que esse resultado não vale em dimensão infinita?

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existam duas soluções $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de $x' = f(t, x)$ satisfazendo: 1) $Graf(\varphi_1) \bigcap Graf(\varphi_2) = \{(0, p), (1, q)\}$; e 2)$Graf(\varphi_1) \bigcup Graf(\varphi_2)$ é a fronteira de uma região D homeomorfa a um disco. Prove que para todo $x \in D$ existe uma solução φ de $x' = f(t, x)$ tal que seu gráfico contém os pontos x, $(0, p)$ e $(1, q)$.