Exercícios em Sala
MA-311 - Cálculo III - Turma Z
("2o. Teste")
04/10/2007

Nome: GABARITO RA:

Bom exercício para todos. Favor não retirar o grampo!

1. Encontre uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para a equação diferencial linear com coeficientes constantes no espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ dada por $x' = A\,x$, onde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Confirme sua resposta verificando que $\Psi'(t) = A\,\Psi(t)$. ~~O ponto (0, 0) é estável?~~ Qual é a curva solução quando a condição inicial é $(1, 0)$? Faço um esboço do diagrama de fa

2. Use transformada de Laplace para achar a solução da equação:

$$y'' + 4y = \sin t + u_\pi(t)\sin(t - \pi)$$

com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Explicite a solução para $t > \pi$.

1) Auto-Valores: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\boxed{\lambda_1 = -3}$ $\boxed{\lambda_2 = 1}$ 0,5

Auto vetores: λ_1: $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $-x + 4y = -3x$

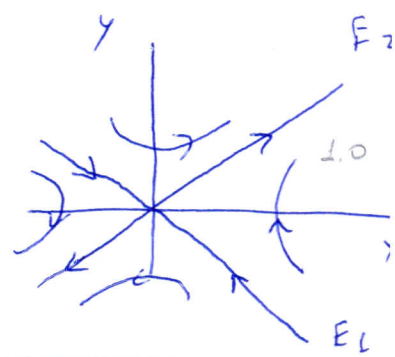
0,5 $\boxed{y = -\frac{1}{2}x}$ $v_1 = (1, -1/2)$

λ_2: $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \boxed{y = \frac{1}{2}x}$ $v_2 = (1, 1/2)$ 0,5

Matriz Fundamental: $\psi(t) = \begin{pmatrix} v_1 e^{-3t} & v_2 e^{t} \end{pmatrix}$

0,5

Diagrama de fase:



$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{t} \\ -\frac{e^{-3t}}{2} & \frac{e^{t}}{2} \end{pmatrix} \qquad \Psi'(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-3t} & e^{t} \\ +\frac{3}{2}e^{-3t} & \frac{e^{t}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Psi' = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{t} \\ -\frac{e^{-3t}}{2} & \frac{e^{t}}{2} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{OK}}.$$

1.0

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \beta = 1/2$$

1.0

então se $x_0 = (1,0)$, $x(t) = \Psi(t) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-3t} + e^{t}}{2} \\ -\frac{e^{-3t} + e^{t}}{4} \end{pmatrix}$.

2) $Y(s)(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$ 1.0

$$Y(s) = \frac{1/3}{s^2+1} - \left(\frac{1}{3\cdot 2}\right)\left(\frac{2}{(s^2+4)}\right) + e^{-\pi s}\left(\frac{1/3}{s^2+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s^2+4)}\right)\right)$$ 1,0

Então $y(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t + \overbrace{\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t-\pi) - \frac{1}{6}\operatorname{sen}(2(t-\pi)\right.}^{\mu_\pi(t)}$

1,0

Para $t > \pi$:

$$y(t) = \cancel{\frac{1}{3}\operatorname{sen} t} - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2t + \cancel{\frac{1}{3}(-\operatorname{sen} t)} - \frac{1}{6}\underbrace{\operatorname{sen}(2t - 2\pi)}_{= \operatorname{sen} 2t}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t}$$ 2,0