3ªProva de MA-311 Cálculo III

29/novembro/2007

Nome: GABARITO
RA:

Não destaque as páginas. Cada questão deve ser bem justificada. Boa prova!

1. Determine o intervalo de convergência, incluindo os extremos das séries de potências:

   a) (1 ponto) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n5^n}$.

   b) (1 ponto) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$.

a) Pelo teste da razão: (também pode ser usado o teste da raiz)

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \cdot \frac{n5^n}{(x-1)^n}\right| = \lim \frac{n}{5(n+1)}|x-1|$$

$$= \frac{|x-1|}{5} = L$$

Para termos convergência precisa que $L<1$, então $\frac{|x-1|}{5} < 1$ $\iff |x-1|<5$. Portanto o raio de convergência é $\underline{R=5}$ e o intervalo está centrado em $a=1$. Nos extremos temos:

<u>Para $x=-4$</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-5)^n}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ série harmônica $\therefore$ <u>diverge</u>.

<u>Para $x=6$</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(5^n)}{n5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ que <u>converge</u> pelo Teorema de Leibniz.

<u>Conclusão</u>: Intervalo de convergência é $I=(-4,6]$

b) Pelo teste da razão

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(x-2)^n} \right|$$

$$= \lim \frac{|x-2|}{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Portanto $R = \infty$ e a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$

(Aliás, essa é a série de Taylor de e^{x-2} centrada em $a = 2$)

$\blacksquare$

2. (2 ponto) Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, descreva a sua série de Taylor centrada no ponto $a \in \mathbb{R}$. Partindo da série da exponencial e^x, obtenha a série de Taylor da função

$$f(x) = (x-2)^3 e^x$$

ao redor do ponto $x = 2$. Só observando a sua série de Taylor, quanto é $f^{(4)}(2)$ e $f^{(5)}(2)$ i.e. sua 4a. e 5a. derivada em $a = 2$.

A série de Taylor da função f, centrada em a é dada por:

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)x}{1!} + \frac{f''(a)x^2}{2!} + \frac{f'''(a)x^3}{3!} + \dots$$

$$+ \dots \frac{f^{(n)}(a)\,x^n}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)\,x^n}{n!}.$$

Ou, reescrevendo de outra maneira:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

Sabendo que $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ então

$e^{x-2} \cdot e^{2} = e^{x}$ é usado para concluirmos que e^{x} centrado em $a = 2$ é dado por:

$$e^{x} = e^{2}\left[1 + \frac{(x-2)}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{(x-2)^3}{3!} + \dots\right].$$

Agora, multiplicando por $(x-2)^3$, como é pedido, então

$$f(x) = (x-2)^3 e^{x} = e^{2}\left[(x-2)^3 + \frac{(x-2)^4}{1!} + \frac{(x-2)^5}{2!} + \frac{(x-2)^6}{3!} + \dots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{2} \frac{(x-2)^{n+3}}{n!}$$

Pela fórmula geral da série de Taylor, o coeficiente de $(x-2)^4$ é $\dfrac{f^{(4)}(a)}{4!}$ que acima é dado por $\dfrac{e^2}{1!}$. Portanto

$\boxed{f^{(4)}(2) = e^{2} \cdot 4!}$ Pelo mesmo raciocínio $\boxed{f^{(5)}(2) = \dfrac{e^{2}\, 5!}{2}}$

$\blacksquare$

<u>Obs:</u> Aliás, pela série de Taylor temos que:

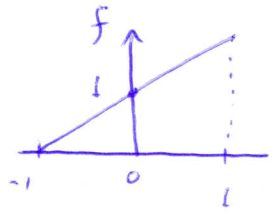
$$f(2) = f'(2) = f''(2) = 0$$

e $\boxed{f^{(n)}(2) = \dfrac{e^{2}\, n!}{(n-3)!} \quad \text{para } n \geq 3}$

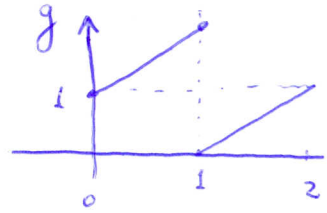
3. **a)** (1 ponto) Por que as funções $f(x) = 1 + x$, com $x \in [-1, 1]$ e $g(x) = 1 + x$ se $x \in [0, 1)$ e $g(x) = -1 + x$ se $x \in [1, 2]$ podem ser descritas pela mesma série de Fourier? Para qual valor converge a série de Fourier das funções acima quando $x = 1$? Justifique.

b) (2 ponto) Calcule a série de Fourier das funções acima e verifique sua resposta do item acima em $x = 1$.

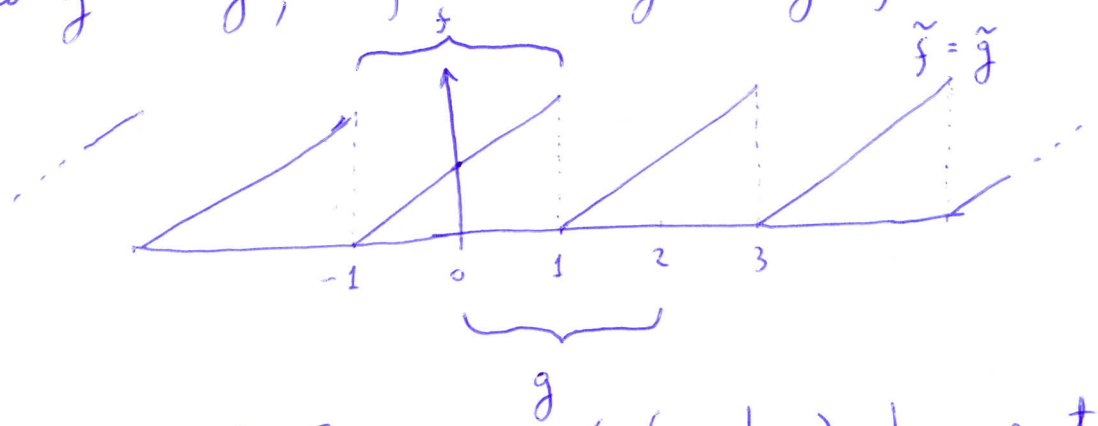
a) Olhando para os gráficos



e



Note que a periodização $\tilde{f}$ da f (período 2) é igual à periodização $\tilde{g}$ da g, conforme o seguinte gráfico:



Como a série de Fourier da f (ou da g) descreve também a série de Fourier de $\tilde{f}$ (ou de $\tilde{g}$), então elas podem ser descritas pela mesma série.

Pelo Teorema de Fourier, a série de Fourier $SF(x)$ converge para $\dfrac{\tilde{f}(1^-)+\tilde{f}(1^+)}{2} = \dfrac{2+0}{2} = 1.$

b) Já que são iguais, vamos calcular a SF apenas da f.

Com $L = 1$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$$

ímpar par

$$a_n = \int_{-1}^{1}(x-1)\cos(n\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\cos(n\pi x)\,dx - \cancel{\int_{-1}^{1}\cos(n\pi x)\,dx} \to 0$$

realiza ciclos completos

$$= 0 + 0 = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^{1}(x-1)\,\text{sen}(n\pi x)\,dx = 2\int_{0}^{1} x\,\text{sen}(n\pi x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v = -\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) & v' = \text{sen}(n\pi x) \end{array}}$$

$$= \frac{-2x\cos(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \cancel{\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{1}\cos(n\pi x)\,dx} \to 0$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}$$

Então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi}\left[\text{sen}(\pi x) - \frac{1}{2}\text{sen}(2\pi x) + \frac{1}{3}\text{sen}(3\pi x) - \dots\right]$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}(n\pi x)$$

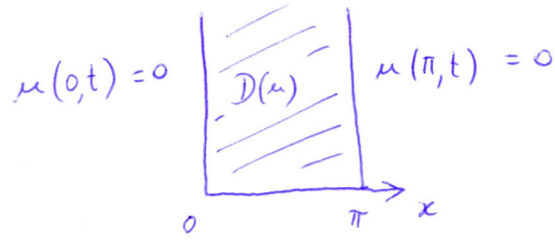
$\blacksquare$

4. (3 pontos) Use o método de separação de variáveis para achar a solução $u(x,t)$, $x \in [0,\pi]$, $t \geq 0$ da seguinte equação:

$$u_{xx} + u = u_{tt}$$

onde as condições de contorno são $u(0,t) \equiv u(\pi,t) \equiv 0$ para todo $t > 0$, $u_t(x,0) = 0$ e $u(x,0) = \sqrt{3}/2 sen(x) - \sqrt{3}/2 sen(4x)$.

Se representarmos as condições de contorno no domínio, temos:



$u_t(x,0) = 0$

$u(x,0) = f$ dada.

Usando a técnica de mudança de variáveis com $u(x,t) = X(x)T(t)$ e substituindo na EDP ficamos com $X''T + XT = XT''$.

Dividindo os dois lados por XT ficamos com

$$\frac{X''}{X} + 1 = \frac{T''}{T} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} - 1 = \lambda \text{ constante}}$$

Ficamos então com duas EDO's

$$\begin{cases} 1)\ X'' - \lambda X = 0 & \text{com C.C. } X(0) = X(\pi) = 0 \\ 2)\ T'' - (\lambda+1)T = 0 & \text{com C.I. } T'(0) = 0 \end{cases}$$

Os autovalores λ_n e respectivas autofunções de (1) são:

$$\lambda_n = -n^2 \longleftrightarrow X_n = \operatorname{sen}(nx) \quad (\text{Modos de } X).$$
$n \geq 1$

Para a equação (2) temos os seguintes modos de T:

$$\lambda_1 = -1 \longleftrightarrow T_1 = a + \cancel{bt}^{\,0}, \quad b = 0 \text{ porque } T'(0) = 0.$$

$$\lambda_n = -n^2 \longleftrightarrow T_n(t) = \cancel{c \operatorname{sen}(\sqrt{n^2-1}\, t)}^{\,0} + d \cos(\sqrt{n^2-1}\, t)$$
$n > 1$ $\qquad (T'(0) = 0)$

Assim, os modos da solução são
$$\begin{cases} u_1(x,t) = \operatorname{sen} x \quad e \\ u_n(x,t) = \operatorname{sen}(nx) \cos(\sqrt{n^2-1}\, t) \\ p/\ n > 1 \end{cases}$$

Solução geral: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$

Para a C.C. $u(x,0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 4x$

temos que $c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $c_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $c_j = 0 \ \forall j \neq 1, 4$

Portanto a solução é

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}(4x) \cos(\sqrt{15}\, t)}$$