2ª Prova de MA-311 Cálculo III

11/outubro/2007

Nome: Gabarito.
RA:

Justifique as respostas. Não destaque as páginas. Boa prova!

1. (1,5 ponto) Use a transformada de Laplace para achar a solução da equação abaixo, com condição inicial $y(0) = 0, y'(0) = 0$:

$$y'' + 5y' + 6y = u_2(t)e^{(t-2)}$$

Aplicando T. Laplace nos dois lados da equação ficamos com

$$Y(s)(s^2+5s+6) = e^{-2s}\frac{1}{s-1} \iff Y(s) = \frac{e^{-2s}}{(s-1)(s+3)(s+2)}$$

$$Y(s) = e^{-2s}\left[\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+2}\right] \quad \text{com}$$

$A(s^2+5s+6) + B(s^2+s-2) + C(s^2+2s-3) = 1$. A equação linear fica

$$\begin{cases} (1) & A + B + C = 0 \\ (2) & 5A + B + 2C = 0 \\ (3) & 6A - 2B - 3C = 1 \end{cases}$$

De (1) + (2) + (3) sai que $\boxed{A = 1/12}$

De (1) - (2) sai que $\boxed{C = -1/3}$

De (1) sai que $\boxed{B = \frac{1}{4}}$

Assim, a solução fica

$$\boxed{y(t) = u_2(t)\left[\frac{1}{12}e^{(t-2)} + \frac{1}{4}e^{-3(t-2)} - \frac{1}{3}e^{-2(t-2)}\right]}$$

2. **a)** (1,3 ponto) Ache ~~a~~ UMA solução fundamental $\Phi(t)$ do sistema de equações lineares:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) (0,7 ponto) Esboce e justifique o retrato de fase.

c) (0,5 ponto) Calcule a solução quando a condição inicial for $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

d) (1 ponto) Agora, se $x(t) \in \mathbb{R}^3$, aponte uma solução fundamental para a equação linear $x' = A(t)x$, onde

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2t \end{pmatrix}.$$

a) Autovalores: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -1 \pm i}$$

Autovetores (complexos): $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-1+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \boxed{-y = ix}$

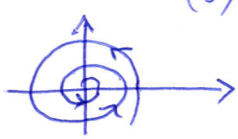
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow$ uma solução complexa é

$$v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ -i\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = e^{-t}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}}_{Re} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t \end{pmatrix}}_{Im.}\right]$$

Tanto a parte real quanto a imaginária são soluções l.i, assim

$$\boxed{\Phi(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & -\cos t \end{pmatrix}}$$ é uma solução fundamental.

b) É uma rotação com contração. Direção de $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ subindo $\Rightarrow$ rotação no sentido anti-horário.



c) Solução geral é

$$y(t) = e^{-t}\left[c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\operatorname{sen} t\\ -\cos t\end{pmatrix}\right]$$

Em $t=0$ $\quad y(0) = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}^{\text{C.I.}}$

$\Rightarrow c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Portanto a solução é

$$\boxed{y(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \operatorname{sen} t\end{pmatrix}}$$

d) Agora, se $x'(t) = \left(\begin{array}{cc|c}-1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2t\end{array}\right)$ a terceira coordenada está desacoplada das outras duas. i.e. $x_3'(t) = 2t\, x_3(t)$.

Resolvendo por separação de variáveis: $\dfrac{dx_3}{x_3} = 2t\, dt$

$$\ln x_3 = t^2 + K \Rightarrow \boxed{x_3(t) = K e^{t^2}}$$

Assim, uma solução fundamental é

$$\Phi(t) = \left(\begin{array}{cc|c}\cos t & \operatorname{sen} t & 0\\ \operatorname{sen} t & -\cos t & 0\\ \hline 0 & 0 & e^{t^2}\end{array}\right)$$

3. (2,5 pontos)Verifique se existe ponto de equilíbrio no sistema abaixo. Se existir, como fica o retrato de fase nas proximidades dele(s)? Resolva a equação usando variação de parâmetros, para a condição inicial $x_0 = (2, 0)$.

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

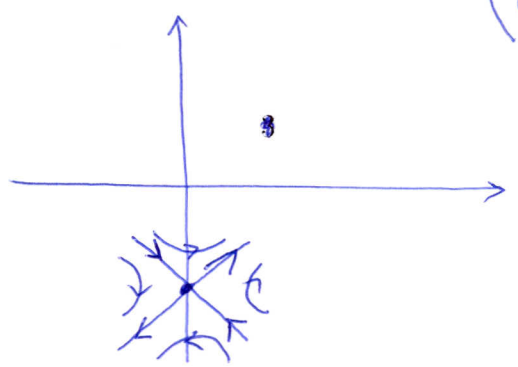
Ponto de equilíbrio se $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{F(x,y) \in \mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \boxed{(x, y) = (0, -1) \text{ é Pto Equilíbrio}}$

Pelo Teorema de Hartman-Grobman, se $Re[\lambda_{1,2}]$ forem diferentes de zero então nas proximidades de $(0, -1)$ o sistema tem retrato de fase similar ao da equação $x' = JF(0,-1) \cdot x$. Como $JF \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ em todo ponto (x, y) então temos que estudar o sistema linear

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

<u>Autovalores:</u> $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ e autovetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Uma solução fundamental é $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$.



Voltando à equação linear não homogênea original, pela fórmula de variação de parâmetros temos:

$$x(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

Tal que $\Phi(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \boxed{c_1 = c_2 = 1}$

$$\Phi(t)^{-1} = (+2)^{-1}\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix}$$

Então $x(t) = 2\begin{pmatrix} \cosh t \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} \\ e^{s} \end{pmatrix} ds$

$$= 2\begin{pmatrix} \cosh t \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 - e^{-t} \\ e^{t} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} \cosh t \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} - e^{-t} \\ e^{t} + e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} \cosh t \\ \operatorname{senh} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{+t} \\ +e^{+t} \end{pmatrix}}_{\text{Sol. da homogênea}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Sol. Particular.}}}$$

4. (2,5 pontos) Considerando o sistema abaixo, calcule os pontos de equilíbrio. Para cada um desses pontos, estude o comportamento do retrato de fase nas suas proximidades. Finalmente faça um esboço do retrato de fase no primeiro quadrante.

$$\begin{cases} x' &= x(4-x-y) \\ y' &= y(-2+x) \end{cases}$$

<u>Pontos de Equilíbrio:</u> $F(x,y)=0$ então

$$\begin{cases} x(4-x-y)=0 \\ y(-2+x)=0 \end{cases}$$

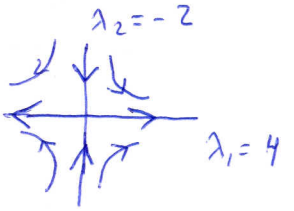
$P_1 = (0,0)$

$P_2 = (4,0)$

$P_3 = (2,2)$

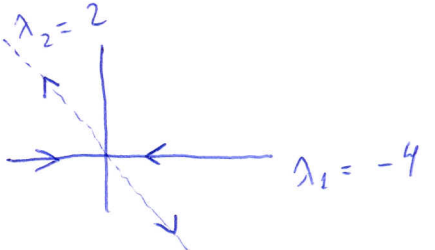
$$F(x,y) = \begin{pmatrix} -x^2+4x-xy \\ -2y+xy \end{pmatrix} \text{ então } JF(x,y) = \begin{pmatrix} (-2x+4-y) & -x \\ y & (x-2) \end{pmatrix}$$

<u>Em P_1:</u> $JF(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



<u>Em P_2:</u> $JF(4,0) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -4$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ $v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$



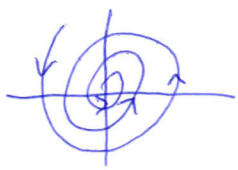
Em P_3: $JF = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Autovalores: $\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$$

rotação + contração.

$JF(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ sentido anti-horário



Esboço do Retrato de Fase: