1ªProva de MA-311 Cálculo III

06/setembro/2007

Nome: GABARITO **RA:**
Curso:

Não destaque as páginas. Boa prova!

1. (2pt) Defina equação exata e o significado de sua solução. Verifique que $(x+2)\sin y\, dx + x\cos y\, dy = 0$ não é exata, mas com o fator integrante $\mu(t) = xe^x$ torna-se exata. Resolva a equação.

São equações da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{onde} \quad M = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ e } N = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

para alguma função $\Psi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Uma EDO é exata se e somente se $M_y = N_x$. Soluções são curvas de nível de Ψ.

Para

$M = (x+2)\operatorname{sen} y \implies M_y = (x+2)\cos y$

$N = x\cos y \implies N_x = \cos y$

$\therefore M_y \neq N_x \implies$ NÃO é exata.

Multiplicando pelo fator integrante:

$$\begin{cases} M = xe^x(x+2)\operatorname{sen} y \\ N = x^2 e^x \cos y \end{cases}$$

$M_y = xe^x(x+2)\cos y$

$N_x = 2xe^x\cos y + x^2e^x\cos y$

$= x(x+2)e^x\cos y$

$\therefore$ é EXATA.

Solução:

$$\psi = \int x^2 e^x \cos y \, dy + g(x) = x^2 e^x \operatorname{sen} y + g(x)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = x(2+x) e^x \operatorname{sen} y + g' = M = x e^x (x+2) \operatorname{sen} y$$

$$g' = 0 \Longrightarrow g = K$$

$$\psi = x^2 e^x \operatorname{sen} y$$

Soluções são curvas em $\mathbb{R}^2$ t.q.

$\boxed{x^2 e^x \operatorname{sen} y = k}$ para qualquer constante K.

$\blacksquare$

2. (2,5pt) Enuncie claramente uma das versões do TEU (teorema de existência e unicidade de soluções para um problema de valor inicial). Dê um exemplo de EDO $y' = f(t, y)$ onde existe solução única para toda condição inicial no domínio da f (deixe claro qual é o domínio). Dê um exemplo onde as condições do TEU não são satisfeitas em alguns pontos do domínio onde pode haver "bifurcação" de solução:

Dado um P.V.I.
$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

<u>TEU</u> (uma versão). Se em um retângulo $[t_1, t_2] \times [y_1, y_2]$ contendo (t_0, y_0) f é contínua e K-Lipschitz em y então neste retângulo só existe uma solução que passa por (t_0, y_0).

<u>TEU</u> (Outra versão): Se no retângulo como descrito acima f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas então neste retângulo existe e é única a solução que passa por (t_0, x_0).

<u>Exemplo 1</u>: $y' = t\,y$ $\qquad f(t, y) = t \cdot y \qquad D(f) = \mathbb{R}^2$.

f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em ~~todo~~ $\mathbb{R}^2$ $\therefore$ $\forall$ C.I. vai ter uma única solução.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$f(t,y) = y^{1/3}$$

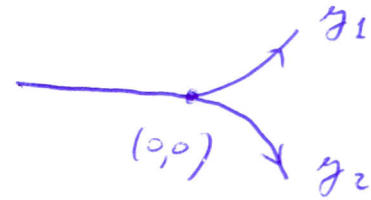
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3\,y^{2/3}}$$

NÃO é contínua em $y=0$

Soluções podem ser

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

ou



$$y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ -\left(\frac{2t}{3}\right)^{3/2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

3. Dada a equação diferencial

$$y' = \frac{x^2 - 2y^2}{2xy},$$

com $x, y \neq 0$:

(a) (0,5 pt) Mostre que se $y(x)$ for uma solução então $-y(x)$ também o será (i.e. simetria da família de soluções em relação ao eixo x).

(b) (1pt) Determine as regiões do 1o. quadrante onde as soluções são crescentes e decrescentes.

(c) (1,5pt) Usando a mudança de variável $y(x) = x\,v(x)$, ache a família de soluções dependendo de um parâmetro K em um certo intervalo.

(d) (1pt) Exiba as soluções para as condições iniciais $y(1) = 1/2$, $y(1) = -1/2$, $y(1) = 1$. Esboce essas soluções somente com as informações dos itens anteriores.

a) Basta verificar que $(-y)' = \dfrac{x^2 - 2(-y)^2}{2x(-y)} \iff$

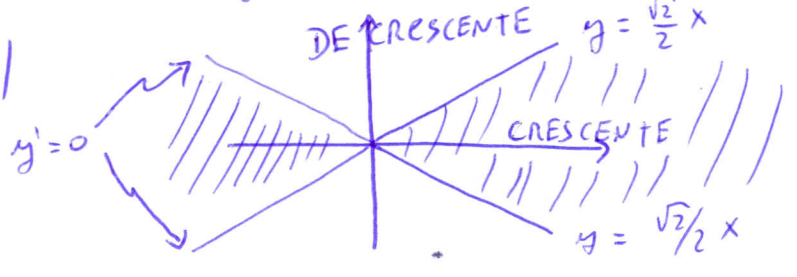
$$-y' = -\frac{x^2 - 2y^2}{2xy} \iff y' = \frac{x^2 - 2y^2}{2xy}$$

OK já que y é solução.

b) $\dfrac{x^2 - 2y^2}{2xy} > 0$? Como $x, y > 0$

$x^2 - 2y^2 > 0 \iff x^2 > 2y^2 \iff |x| > \sqrt{2}\,|y|$

ou $|y| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}|x|$



c) $\begin{cases} y = x v \\ v = y/x \end{cases} \Rightarrow y' = x v' + v$

$$y' = \frac{1}{2v} - v \Rightarrow x v' + v = \frac{1}{2v} - v \quad \text{ou}$$

$$x v' = \frac{1}{2v} - 2v = \frac{1-4v^2}{2v}$$. Por separação de variáveis:

$$\int \frac{2v}{\underbrace{1-4v^2}} \, dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{4} \ln|1-4v^2| = \ln|x| + K$$

$$\begin{cases} u = 1-4v^2 \\ du = -8v\,dv \end{cases}$$

$$1 - 4v^2 = x^{-4} \cdot K$$

$$v^2 = \left(K x^{-4} - 1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

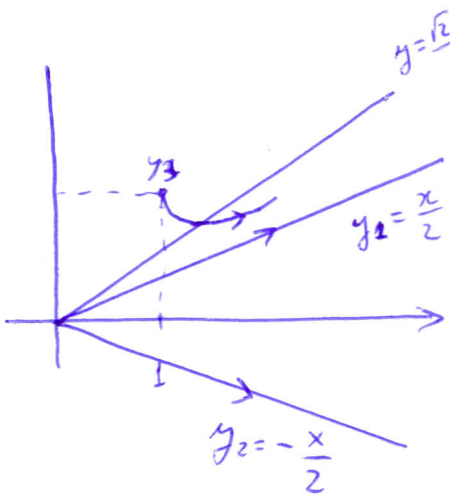
$$\boxed{v = \pm \frac{\sqrt{x^4 - K}}{2x^2}} \qquad K < x^4$$

$$\boxed{y(x) = \pm \frac{\sqrt{x^4 - K}}{2x}}$$

d) i) Se $y(1) = 1/2 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1^4 - K}}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow K = 0$

$$\therefore \; y_1(t) = \frac{\sqrt{x^4}}{2x} = \boxed{\frac{1}{2} x}$$

ii) Se $y(1) = -1/2 \overset{\text{item (a)}}{\Longrightarrow} \boxed{y_2(t) = -\frac{1}{2} x}$



iii) Se $y(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{1^4 - K}}{2 \cdot 1} = 1 \Rightarrow K = -3$

$$\Rightarrow \boxed{y_3(t) = \frac{\sqrt{x^4 + 3}}{2x}}$$

(Obs: feito em aula várias versões, inclusive mais gerais)

4. (2,5pt) Sem resolver, qual é a forma geral esperada da solução de $y'' + y = \tan t$, com $0 < t < \pi/2$. Identifique duas soluções fundamentais y_1 e y_2 da homogênea associada . Agora ache uma solução particular da forma $Y(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$ de tal forma que $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 1$. (Extra valendo mais 0,5 pt..Qual a interpretação da diferença nas soluções particulares se ao invés de $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 1$ exigirmos que $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$, como está no livro?).

A forma geral da solução de uma EDO linear de 2ª ordem não homogênea é $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t)$, onde y_1 e y são duas soluções l.i. da equação homogênea associada, $Y(t)$ é uma solução particular e c_1, c_2 são constantes a serem ajustados de acordo com os C.I.

E.D. homogênea associada: $y'' + y = 0$ tem polinômio característico $r^2 + 1 = 0 \therefore r = \pm i$ e soluções l.i podem ser $\underset{y_1}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{sen} t}}$ e $\underset{y_2}{\underset{\shortparallel}{\cos t}}$

Buscamos uma solução particular da forma

$$Y(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$Y'(t) = \overbrace{u_1' y_1}^{1} + u_1 y_1' + \overbrace{u_2' y_2}^{1} + u_2 y_2'$$

$$Y''(t) = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''$$

Substituindo na equação $y'' + y = \operatorname{tg} t$ obtemos

$$u_1 \cancel{(y_1 + y_1'')}^{0} + u_2 \cancel{(y_2 + y_2'')}^{0} + u_1' y_1' + u_2' y_2' = \operatorname{tg} t$$

Ficamos então com o seguinte sistema linear para u_1' e u_2'

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ tg\,t \end{pmatrix}$$

Pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \cos t \\ tg\,t & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -(-\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t) = 2 \operatorname{sen} t \\[2ex] u_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} t & 1 \\ \cos t & tg\,t \end{vmatrix}}{-1} = \cos t - \dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \end{cases}$$

Assim: $\boxed{u_1(t) = -2\cos t}$

$$u_2(t) = \operatorname{sen} t - \int \underbrace{\operatorname{sen} t}_{u'} \underbrace{tg\,t}_{v}\, dt = \operatorname{sen} t + \cos t\, tg\,t - \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\, d$$

$$= 2 \operatorname{sen} t - \int \sec t\, dt = \boxed{2 \operatorname{sen} t - \ln|\sec t + tg\,t|}$$

pode deixar indicado.

<u>Extra</u>: Se trocassemos $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 1$ por $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$ as soluções seriam $\boxed{u_1(t) = -\cos t}$ e $\boxed{u_2(t) = \operatorname{sen} t - \ln|\sec t + tg\,t|}$

No 1º caso $Y_1(t) = -2\cos t \operatorname{sen} t + (2\operatorname{sen} t - \ln|\sec t + tg\,t|)\cos t$

$$\boxed{Y_1(t) = -\ln|\sec t + tg\,t| \cos t}$$

No 2º caso $Y_2(t) = -\cos t \operatorname{sen} t + (\operatorname{sen} t - \ln|\sec t + tg\,t|)\cos t$

$$\boxed{Y_2 = -\ln|\sec t + tg\,t| \cos t}$$ ∴ SÃO IGUAIS!