MA-111 Cálculo I- 5a Lista (Aplicações de derivadas)

1. Sejam $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, duas funções reais tais que g é contínua em 0 e f pode ser escrita (fatora-se) como $f(x) = xg(x)$. Sem assumir que g seja derivável em 0, mostre, pela definição, que f é derivável em 0. Dê um exemplo de f deste tipo onde, de fato g só é contínua mas não é derivável em 0.

2. Deduza a fórmula de derivada da função inversa, e use essa fórmula para calcular a derivada de $\operatorname{arcsec} x$.

3. Calcule a derivada de $f(x) = \frac{e^{-x}\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{tg} x}$.

4. Verifique que as derivadas satisfazem

$$a)\ \frac{d}{dx}\left[x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] = \operatorname{arctg} x$$

$$b)\ \frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\operatorname{arcsen} x + \frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}\right] = x^2\operatorname{arcsen} x$$

$$c)\ \frac{d}{dx}\left[(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}\right] = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$$

$$d)\ \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$$

5. Prove que o polinômio $x^3 - 3x^2 + 6$ tem uma única raiz real.

6. Prove que o polinômio $x^3 + x^2 - 5x + 1$ tem três única raiz real.

7. Determine todos os valores de a para que a equação $x^3+3x^2-9x+a = 0$ tenha uma única solução real.

8. Esboçar os gráficos das funções

Exercícios 9.4

Esboce o gráfico.

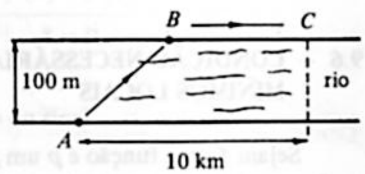
1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
2. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$
3. $y = \sqrt{x^2 - 4}$
4. $y = \dfrac{x}{x+1}$
5. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
6. $g(x) = x\,e^{-3x}$
7. $f(x) = 2x + 1 + e^{-x}$
8. $f(x) = e^{-x^2}$
9. $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} + 2x + 1$
10. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$
11. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$
12. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$
13. $y = \dfrac{x^3 - x + 1}{x^2}$
14. $y = e^x - e^{3x}$
15. $f(x) = x^4 - 2x^2$
16. $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$
17. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$
18. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$
19. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$
20. $y = \dfrac{4x + 3x^2}{1 + x^2}$

9. Determine o retângulo de área máxima, e lado paralelos aos eixos coordenados, inscrito na elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

10. Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de 1 m^3 de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa Cr\$ 10.000 o metro quadrado e na tampa material de Cr\$ 20.000 o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material empregado.

11. r é uma reta que passa pelo ponto $(1, 2)$ e intercepta os eixos nos pontos $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$, com $a > 0$ e $b > 0$. Determine r de modo que a distância de A a B seja a menor possível.

12. Certa pessoa que se encontra em A, para atingir C, utilizará na travessia do rio (de 100 m de largura) um barco com velocidade máxima de 10 km/h; de B a C utilizará uma bicicleta com velocidade máxima de 15 km/h. Determine B para que o tempo gasto no percurso seja o menor possível.



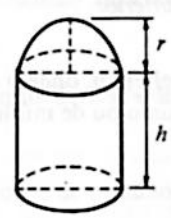
13. Qual o ponto P da curva $y = x^2$ que se encontra mais próximo de $(3, 0)$? Seja $P = (a, b)$ tal ponto; mostre que a reta que passa por $(3, 0)$ e (a, b) é normal à curva em (a, b).

14. Encontre o ponto da curva $y = \dfrac{2}{x}$, $x > 0$, que está mais próximo da origem.

15. Duas partículas P e Q movem-se, respectivamente, sobre os eixos $0x$ e $0y$. A função de posição de P é $x = \sqrt{t}$ e a de Q, $y = t^2 - \dfrac{3}{4}$, $t \geq 0$. Determine o instante em que a distância entre P e Q seja a menor possível.

16. Seja g definida e positiva no intervalo I. Seja $p \in I$. Prove: p será ponto de máximo (ou de mínimo) de $h(x) = \sqrt{g(x)}$ em I, se, e somente se, p for ponto de máximo (ou de mínimo) de g em I.

17. Um sólido será construído, acoplando-se a um cilindro circular reto de altura h e raio r, uma semi-esfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume seja máximo.



18. A Cia. α Ltda. produz determinado produto e vende-o a um preço unitário de Cr\$ 13. Estima-se que o custo total c para produzir e vender q unidades é dado por $c = q^3 - 3q^2 + 4q + 2$. Supondo que toda a produção seja absorvida pelo mercado consumidor, que quantidade deverá ser produzida para se ter lucro máximo?

19. Determinado produto é produzido e vendido a um preço unitário p. O preço de venda não é constante, mas varia em função da quantidade q demandada pelo mercado, de acordo com a equação $p = \sqrt{20 - q}$, $0 \leq q \leq 20$. Admita que, para produzir e vender uma unidade do produto, a empresa gasta em média Cr\$ 3,50. Que quantidade deverá ser produzida para que o lucro seja máximo?

9.

10. .

20. Do ponto A, situado numa das margens de um rio, de 100 m de largura, deve-se levar energia elétrica ao ponto C situado na outra margem do rio. O fio a ser utilizado na água custa Cr$ 5.000 o metro e o que será utilizado fora, Cr$ 3.000 o metro. Como deverá ser feita a ligação para que os gastos com os fios seja o menor possível? (Suponha as margens retilíneas e paralelas.)