MA-111 Cálculo I- 1a LISTA

1. Mostre que $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in R$ e que vale a igualdade se e somente se $x = y$.

2. Mostre que $x^2 - xy + y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in R$ e que vale a igualdade se e somente se $x = y = 0$.

3. Resolva a equação $\left|\frac{3x+8}{2x-3}\right| = 4$.

4. Considere dois números $a, b \in \mathbf{R}$ tais que a é racional e b é irracional. Então $a + b$ é pode ser racional? Justifique sua resposta (i.e. demonstre).

5. Se $0 < x < y$ prove que $\sqrt[3]{y-x} > \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}$.

6. Mostre que:
   a) $x \neq y \Longrightarrow x^2 + 2xy < 2x^2 + 2y^2$ b) $|x| < x^2 + 1, \forall x \in R$
   c) $|x - y| < 1/2, |x + 2| < 1/3 \Longrightarrow |y + 2| < 5/6$ d) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ $\forall x, y \geq 0$

7. Para cada uma das afirmações abaixo, demonstre se verdadeiro ou dê contra-exemplo se fôr falso.
   a) $|x - y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in R$ b) $x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$
   c) $x < y \Longleftrightarrow 1/y < 1/x$ d) $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in R$
   e) $x \neq y \Longrightarrow |x| \neq |y|$ f) $|x - y| \geq |x| - |y|$ $\forall x, y \in R$

8. Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdades abaixo. Dê o intervalo solução e ilustre a solução sobre a reta real.

   a) $(2 - x)(x - 4) > 0$ b) $1 - x^2 < 0$

   c) $2 \leq \frac{2}{3x-1} \leq \frac{20}{3}$ d) $\frac{1}{2x+3} \leq \frac{x-1}{3} \leq \frac{1}{5}$

   e) $(x - 1)^2 < 1 - x$ f) $(2x - 7)^{15} \leq 0$

   g) $(2 - 5x)^{20} > 0$ h) $\frac{x-3}{x-5} > 0$

   i) $\frac{3}{x} + \frac{x-3}{x-1} < \frac{2}{x-1}$ j) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} \geq 5$

9. Encontre os valores de x para os quais cada um dos números abaixo é real.

   a) $\sqrt{\frac{5x-2}{x^2-4}}$ b) $\sqrt[4]{\frac{x^2-x-2}{x^2-4x-3}}$

   c) $\sqrt{7x+9}$ d) $\sqrt{x^2+x+3}$

10. Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdades abaixo. Dê o intervalo solução e ilustre a solução sobre a reta real.

    a) $|x+5| \geq \sqrt{2}$ b) $|x-1| \leq |x+1|$

    c) $|2x+1| \leq 1$ d) $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq 1$

    e) $\frac{|x-3|}{|x+7|} > 0$ f)$|x+4| \geq |x+1|$

    g) $|2x-3| < 5$ h) $|4-x| \geq 1$

    i) $|6+4x| < \left|2-\frac{x}{2}\right|$ j) $\left|\frac{5}{3x-2}\right| \geq \left|\frac{2}{x-1}\right|$

    k) $7+|x| < \frac{1}{x+2}$ l) $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| \leq \frac{1}{2}$

11. Mostre que dado um número p inteiro primo então $\sqrt{p}$ é irracional. Se q é outro inteiro primo diferente de p, use a mesma idéia para mostrar que $\sqrt{pq}$ também é irracional.