Solução

Q1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2x)\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\,dx = 0$ porque o integrando é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação ao zero. $\blacksquare$

Q2) Seja $F(x)$ uma primitiva de $\operatorname{arctg}(\ln(2+\pi t^8))$.
Então $g(x) = F(\sqrt{1+x^2}) - F(e^2)$. Portanto, pela regra da cadeia sua derivada é

$$g'(x) = F'(\sqrt{1+x^2})\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 0$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\ln\left(2+\pi(1+x^2)^4\right)\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\blacksquare$

Q3) $$\int_0^{\pi/2}\cos x\, e^x\,dx \overset{IPP}{=} e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\operatorname{sen}x\, e^x\,dx \overset{IPP}{=}$$

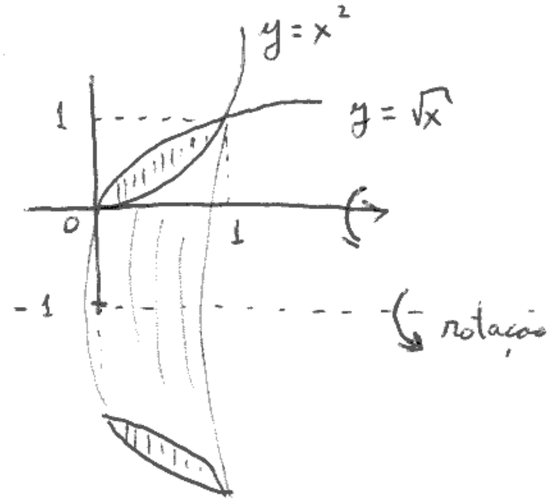
$$\boxed{\begin{array}{ll} u=\cos x & u'=-\operatorname{sen}x \\ v=e^x & v'=e^x \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} u=\operatorname{sen}x & u'=\cos x \\ v=e^x & v'=e^x \end{array}}$$

$$= e^x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + e^x\operatorname{sen}x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\cos x\, e^x\,dx \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\, e^x\,dx = \frac{1}{2}\Big[e^x(\operatorname{sen}x+\cos x)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\Big[\left(e^{\pi/2}\cdot 1\right)-\left(e^0\cdot 1\right)\Big] = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}.$$

$\blacksquare$

Q4)



O volume do sólido é igual ao volume do sólido gerado pela rotação ao redor do eixo x do gráfico de $f(x) = \sqrt{x} + 1$, menos o volume do sólido gerado por $g(x) = x^2 + 1$.

Isto é:

$$V = \int_0^1 \pi \left(\sqrt{x} + 1\right)^2 dx - \int_0^1 \pi \left(x^2 + 1\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x + 2\sqrt{x} - x^4 - 2x^2\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{15 + 40 - 6 - 20}{30} \right] = \frac{29\pi}{30}.$$

■

Q5) $$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} e^x dx = \int \frac{u}{u^2 + 3u + 2} du = I$$

$$\boxed{\begin{aligned} M.V.:\ u &= e^x \\ du &= e^x dx \end{aligned}}$$

Decompondo em frações parciais, temos que

$$\frac{u}{u^2 + 3u + 2} = \frac{-1}{(u+1)} + \frac{2}{u+2}.$$

Portanto

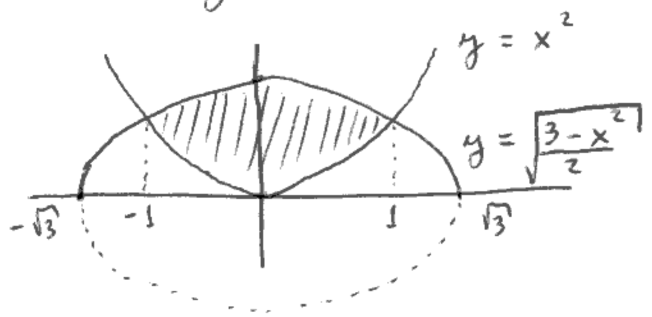
$$I = -\int \frac{du}{u+1} + 2\int \frac{du}{u+2} = -\ln|u+1| + 2\ln|u+2| + K$$

Em termos da variável x temos que as primitivas são

$$F(x) = \ln\left[\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1}\right] + K .$$

∎

Q6) Cálculo da área da região entre uma elipse e uma parábola:



Intersecção entre os dois gráficos:

$$x^2 = \sqrt{\frac{3-x^2}{2}} \iff 2x^4 + x^2 - 3 = 0 \iff$$

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \begin{cases} \nearrow -\frac{3}{2} \quad (\nexists x) \\ \searrow 1 \iff x = +1 \text{ ou } x = -1 . \end{cases}$$

Área a ser calculada (hachurada acima).

$$A = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3-x^2}{2}}\, dx - \int_{-1}^{1} x^2\, dx$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\, dx - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 .$$

Fazendo a mudança de variável ("substituição")

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \operatorname{sen} u \quad , \text{ então } \quad dx = \sqrt{3} \cos u \, du .$$

Então

$$A = 3\sqrt{2} \int_0^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \cos^2 u \, du - \frac{2}{3}$$

$$= 3\sqrt{2} \left[\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} \right]_0^{\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} - \frac{2}{3}$$

$$= 3\sqrt{2} \left(\frac{\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cos\left(\operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{2} \right) - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \right) - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

∎

Q7) (Vários maneiras de fazer).

Para $x \geq 1$

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + 1} > \frac{x^2}{x^3 + 1} \geq \frac{x^2}{2x^3} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x}$$ cuja integral imprópria diverge em $[1, +\infty)$.

Portanto, pelo critério da comparação, a integral imprópria pedida diverge.

∎