MA111 Turmas A e B - 1S 2011 - Teste 2

Nome: ____ RA: __________ 25/03/2011

Respostas sem justificativas serão desconsideradas. Bom trabalho!

1. (30pts) Seja $f(x)$ uma função real, $p, L \in \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Mostre que $\lim_{x \to p} |f(x)| = |L|$ usando a definição formal de limite. Dê exemplo de uma função $g(x)$ tal que $\lim_{x \to p} |g(x)|$ existe, mas $\lim_{x \to p} g(x)$ não existe.

2. (30pts) Considere a função $f(x) = \frac{\sqrt{2-x} - 1}{x-1}$ definida em $(-\infty, 2) \setminus \{1\}$. É possível encontrar uma função contínua $g(x)$ definida em $(-\infty, 2)$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq 1$?

3. (40pts) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos^2(x) + 2\cos(x) - 3)}{\cos^2(x) - 1}$.

Gabarito T2

1) Já foi dado no exercício que para qualquer $\varepsilon > 0$, temos um valor $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ que satisfaz o seguinte:

Se $x \in D_f$ e $0 < |x-p| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

O que precisamos mostrar é que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\varepsilon)$ que satisfaça:

$$\left.\begin{array}{c} 0 < |x-p| < \bar{\delta} \\ x \in D_f \end{array}\right\} \Rightarrow \big| |f(x)| - |L| \big| < \varepsilon.$$

Pois bem, como $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, então $\big||f(x)| - |L|\big| \leq |f(x) - L|$. Assim, tomando $\bar{\delta}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$

temos

$$0 < |x-p| < \delta \Rightarrow \big| |f(x)| - |L| \big| \leq |f(x) - L| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Contra exemplo para mostrar que a recíproca não vale:

1) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ ou 2) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$\nexists \lim_{x \to 0} g(x)$

$\nexists \lim_{x \to p} g(x)$ mas $\lim_{x \to p} |g(x)| = 1$ $\forall p \in \mathbb{R}$.

2) Multiplicando pelo conjugado do numerador

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2-x} - 1)(\sqrt{2-x} + 1)}{(x-1)\ (\sqrt{2-x} + 1)} = \frac{(-x+1)}{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)} = \frac{-1}{\sqrt{2-x}+1}$$

Portanto, tomando $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2-x}+1}$ tenos que

$g(x)$ é contínua $\forall x \in (-\infty, 2)$ e $g(x) = f(x)$ $\forall x \neq 1$ ∎

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos^2 x + 2\cos x - 3)}{\cos^2 x - 1} =$$

se os lim existirem

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos^2 x + 2\cos x - 3)}{(\cos^2 x - 1)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\cos^2 x + 2\cos x - 3)}{(\cos^2 x + 2\cos x - 3)} \overset{\downarrow}{=}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{(\cos x - 1)}(\cos x + 3)}{\cancel{(\cos x - 1)}(\cos x + 1)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos^2 x + 2\cos x - 3)}{(\cos^2 x + 2\cos x - 3)} =$$

$$\boxed{\text{Mud. var. } \mu = \cos^2 x + 2\cos x - 3. \quad x \to 0 \Rightarrow \mu \to 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\cos x + 3}{\cos x + 1}}_{\text{Contínua em 0.}} \cdot \underbrace{\lim_{\mu \to 0} \frac{\operatorname{sen} \mu}{\mu}}_{\text{Lim. Trig. Fund.}} = \left(\frac{1+3}{1+1}\right) \cdot 1 = 2$$ ∎