

## MA-111 CÁLCULO I- 1a LISTA

1. Mostre que  $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0, \forall x, y \in R$  e que vale a igualdade se e somente se  $x = y$ .
2. Mostre que  $x^2 - xy + y^2 \geq 0, \forall x, y \in R$  e que vale a igualdade se e somente se  $x = y = 0$ .
3. Resolva a equação  $\left| \frac{3x+8}{2x-3} \right| = 4$ .
4. Se  $a$  é racional e  $b$  é irracional então podemos afirmar alguma coisa sobre  $a + b$ ?
5. Se  $0 < x < y$  prove que  $\sqrt[3]{y-x} > \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x}$ .
6. Mostre que:
 

a) $x \neq y \implies x^2 + 2xy < 2x^2 + 2y^2$	b) $ x  < x^2 + 1, \forall x \in R$
c) $ x-y  < 1/2,  x+2  < 1/3 \implies  y+2  < 5/6$	d) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \forall x, y \geq 0$
7. Para cada uma das afirmações abaixo, demonstre se verdadeiro ou dê contra-exemplo se fôr falso.
 

a) $ x-y  \leq  x  +  y , \forall x, y \in R$	b) $x < y \implies x^2 < y^2$
c) $x < y \iff 1/y < 1/x$	d) $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in R$
e) $x \neq y \implies  x  \neq  y $	f) $ x-y  \geq  x  -  y  \quad \forall x, y \in R$
8. Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdades abaixo. Dê o intervalo solução e ilustre a solução sobre a reta real.
 

a) $(2-x)(x-4) > 0$	b) $1 - x^2 < 0$
c) $2 \leq \frac{2}{3x-1} \leq \frac{20}{3}$	d) $\frac{1}{2x+3} \leq \frac{x-1}{3} \leq \frac{1}{5}$
e) $(x-1)^2 < 1-x$	f) $(2x-7)^{15} \leq 0$
g) $(2-5x)^{20} > 0$	h) $\frac{x-3}{x-5} > 0$
i) $\frac{3}{x} + \frac{x-3}{x-1} < \frac{2}{x-1}$	j) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} \geq 5$

9. Encontre os valores de  $x$  para os quais cada um dos números abaixo é real.

a)  $\sqrt{\frac{5x-2}{x^2-4}}$       b)  $\sqrt[4]{\frac{x^2-x-2}{x^2-4x-3}}$   
c)  $\sqrt{7x+9}$       d)  $\sqrt{x^2+x+3}$

10. Encontre todos os números reais que satisfazem cada uma das desigualdades abaixo. Dê o intervalo solução e ilustre a solução sobre a reta real.

a)  $|x+5| \geq \sqrt{2}$       b)  $|x-1| \leq |x+1|$   
c)  $|2x+1| \leq 1$       d)  $\left| \frac{x}{x^2+1} \right| \leq 1$   
e)  $\frac{|x-3|}{|x+7|} > 0$       f)  $|x+4| \geq |x+1|$   
g)  $|2x-3| < 5$       h)  $|4-x| \geq 1$   
i)  $|6+4x| < \left| 2 - \frac{x}{2} \right|$       j)  $\left| \frac{5}{3x-2} \right| \geq \left| \frac{2}{x-1} \right|$   
k)  $7 + |x| < \frac{1}{x+2}$       l)  $\left| \frac{2x-3}{x+1} \right| \leq \frac{1}{2}$

11. Mostre que dado um número  $p$  inteiro primo então  $\sqrt{p}$  é irracional. Se  $q$  é outro inteiro primo diferente de  $p$ , use a mesma idéia para mostrar que  $\sqrt{pq}$  também é irracional.