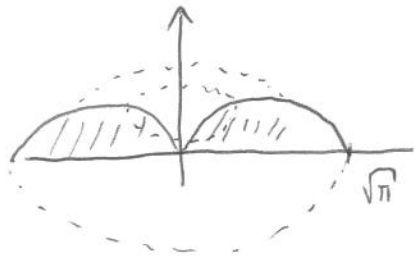
Exame Final
MA111 - Cálculo I - Turma Z
15/12/2008

NOME: GABARITO _____ RA: _____

Escreva de maneira legível, organizando bem as idéias e justificando as passagens. Use rascunhos antes de escrever as respostas. Não destaque as folhas.
Boa prova!

1) (1,5 pt) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico da função $f(x) = \sin(x^2)$, no intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$ ao redor do eixo vertical y.



$$V = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x \operatorname{sen} x^2\, dx$$

Mudança de variável: $\boxed{\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\, dx \end{array}}$

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u \, \frac{du}{2} = -\frac{2\pi}{2} \cos u \Big|_0^{\pi} = -\frac{2\pi}{2}\left(-1 - (1)\right) = 2\pi.$$

2) a) (0,5 pt) Descreva o que é a expansão em série de Taylor de uma função infinitamente derivável em algum intervalo da reta $\mathbb{R}$, ao redor de um ponto a no domínio.

b) (1,0 pt) Deduza a fórmula de Taylor da função $f(x) = (x+1)^5 \ln x$ ao redor do ponto $a = 1$.

a) Aproxima funções transcendentes por polinômios.

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)x^3}{3!} + \cdots$$

b) Considere primeiro só a função $h(x) = \ln(x)$. Então

$h(1) = 0$

$h'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h'(1) = 1$

$h''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow h''(1) = -1$

$h'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow h'''(1) = 2$

$h^{(iv)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \Rightarrow h^{(iv)}(1) = -2 \cdot 3$

$\vdots$

etc

Então $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$

Voltando para a função f, teremos

$$f(1+x) = \left((1+x)-1\right)^5 \ln(1+x)$$

$$= x^5 \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \right]$$

$$= x^6 - \frac{x^7}{2} + \frac{x^8}{3} - \frac{x^9}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \cdots$$

3) Dada a função $f(x) = xe^{-x^2}$: (1 pt) estabeleça o domínio, se tem paridade ou não, limites laterais e no infinito (se existirem), (1 pt) intervalos de crescimento e decrescimento, (1 pt) intervalos de concavidade positiva e negativa, (0,5 pt) pontos de máximo local, mínimo local e pontos de inflexão.

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$ $\therefore$ é ímpar

Não tem limites laterais não-triviais.

Limites no infinito (assíntota):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hopital}}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x\, e^{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hopital}}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x\, e^{x^2}} = 0 .$$

b) <u>Intervalos de Crescimento e Decrescimento</u>:

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = (1 - 2x^2)\underbrace{e^{-x^2}}_{>0}$$

<u>Conclusão</u>: $- \; - \; 0 \; + \; + \; + \; 0 \; - \; - \; -$

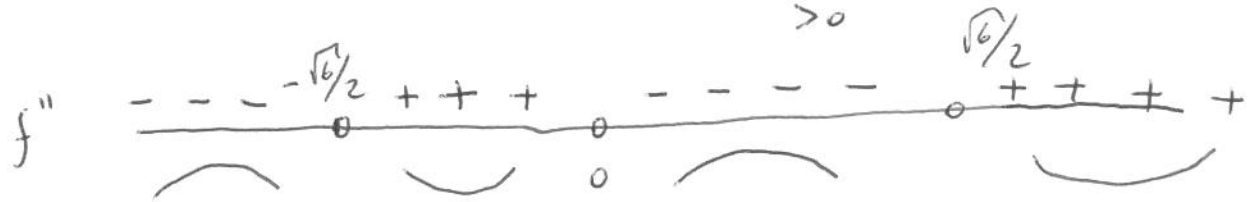
$-\sqrt{2}/2$ $\quad$ 0 $\quad$ $\sqrt{2}/2$

$\uparrow$ Mínimo local $\qquad$ $\uparrow$ Máximo local

c) <u>Concavidade</u>: $f'(x) = (1-2x^2)\,e^{-x^2}$

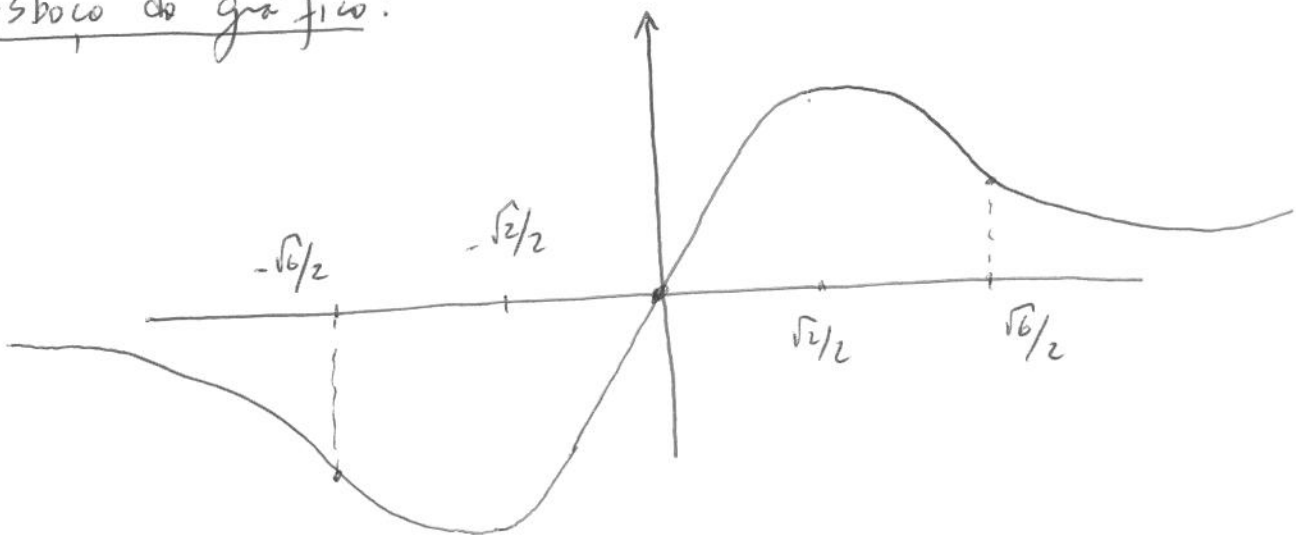
$$\Rightarrow f''(x) = -4x\,e^{-x^2} - 2x(1-2x^2)\,e^{-x^2}$$

$$= -2x\,(3-2x^2)\,\underbrace{e^{-x^2}}_{>0}$$



Ptos de inflexão: $\left\{-\sqrt{6}/2,\ 0 \text{ e } \sqrt{6}/2\right\}$

<u>Esboço do gráfico</u>:



4) (1 pt cada) Escolha 2 dentre as 4 integrais definidas ou primitivas abaixo para resolver:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.$

b) $\displaystyle\int (\ln x)^2\,dx.$

c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\,dx.$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

a) Por frações parciais: $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)(x-1)}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x-2} + \int \frac{-1\,dx}{x-1}$

$$= \ln|x-2|^2 - \ln|x-1| + K = \boxed{\ln\left(\frac{(x-2)^2}{|x-1|}\right) + K \quad x \neq 1.}$$

b) Por partes:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = (\ln x)^2 & u' = 2\,\dfrac{\ln x}{x} \\ v = x & v' = 1 \end{array}}$$

Assim:

$$\int \ln^2 x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,d$$

$$\boxed{= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + K}$$

c) Mudança de variável:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2u = x \\ 2du = dx \end{array}}$$

$$\int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\,dx = \int_0^1 \frac{4\cdot du}{4u^2+4} = \int_0^1 \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \operatorname{arctg} u\Big|_0^1 = \pi/2 - 0 = \boxed{\pi/2}$$

d) Mudança de Variável:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \operatorname{arcsen} x \\ du &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \end{aligned}}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi/2} u \operatorname{sen} u \, du$$

<u>I. por partes:</u>

$$\boxed{\begin{aligned} v &= u & v' &= 1 \\ w &= -\cos u & w' &= \operatorname{sen} u \end{aligned}}$$

$$I = -u \cos u \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos u)\, du$$

$$= (0-0) + \operatorname{sen} u \Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = \boxed{1}$$

5) (1,5 pt) Use o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra da cadeia para calcular a derivada da função:

$$f(x) = \int_1^{\sin x} e^{t^2}\, dt.$$

Justifique cada passagem. Agora calcule $f'(\pi)$.

Seja $g(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt$. O T.F.C. diz que g é derivável e além disso $g'(x) = e^{x^2}$.

Mas $f(x) = g \circ \operatorname{sen}(x)$.

Assim: $f'(x) = g'(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$

$= e^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x$

Portanto $f'(\pi) = e^{\operatorname{sen}^2 \pi} \cdot \cos \pi = \boxed{-e^{\operatorname{sen}^2 \pi}} = \boxed{-1}$