

## 5a. Lista de Análise I - MA 502

1) Prove que  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  é derivável em  $\mathbb{R}$  com derivada:

$$p'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^{i-1}. \quad (1)$$

2) Calcule, a partir da definição, a derivada de  $f(x) = \sqrt{x}$ .

3) Sejam  $A$  e  $B$  abertos de  $\mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow B$  uma função derivável em  $A$  invertível. Prove que se  $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$  então

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad (2)$$

Para um contra-exemplo estude a inversa de  $f(x) = x^3$  no 0.

4) Sejam  $A$  e  $B$  abertos de  $\mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow B$  uma função não-decrescente derivável. Prove que  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x \in A$ .

5) Sejam  $A$  aberto de  $\mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável pela direita no ponto  $a \in A$  tal que  $f'(a) > 0$ . Prove que se existe  $\delta > 0$  tal que se  $a < x < x + \delta$  então  $f(a) < f(x)$ .

6) Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com derivada limitada ( $|g'| \leq K$ ). Prove que existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $0 < \varepsilon < \delta$ ,  $f(x) = x + \varepsilon g(x)$  é bijetora.

7) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) + \frac{x}{2}$  para  $x \neq 0$  e  $f(0) = 0$ . Provar que  $f$  tem derivada em todo  $\mathbb{R}$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$  e que  $f$  não crescente numa vizinhança do 0.

8) Sejam  $A$  aberto de  $\mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Se  $f$  é derivável em  $a \in A$  e  $a$  é um ponto de máximo ou mínimo, prove que  $f'(a) = 0$ . Dê um contra-exemplo da recíproca.

9) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função contínua derivável em  $(a, b)$  tal que  $f(a) = f(b) = 0$ . Prove que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .

10) Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas deriváveis em  $(a, b)$ . Suponha que  $g' \neq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Prove que existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (3)$$

11) Seja  $p(x)$  um polinômio de grau com todas as suas raízes reais. Prove que  $p'(x)$  tem todas as suas raízes reais.

12) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função derivável tal que  $f' = 0$ . Prove que  $f$  é constante.

13) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifica:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^2 \quad (4)$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Prove que  $f$  é constante.

14) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função derivável. Prove que entre duas raízes consecutivas de  $f'$  existe no máximo uma raiz de  $f$ .

- 15) Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas deriváveis em  $c \in (a, b)$  tais que  $f(c) = g(c) = 0$ . Suponha que  $g'(c) \neq 0$ . Prove que

$$\lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (5)$$

- 16) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função derivável em  $c \in [a, b]$ . Sejam  $(x_n)_n$  e  $(y_n)_n$  seqüências de pontos de  $[a, b]$  tais que  $x_n < c < y_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ . Provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(c). \quad (6)$$

- 17) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função duas vezes derivável em  $c \in [a, b]$ . Prove que

$$f''(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+2h) - 2f(c+h) + 2f(c)}{h^2} \quad (7)$$

- 18) Determine dois números reais cuja soma é 10 e cujo produto seja o máximo possível.

- 19) Considere a função  $f(x) = (1+x)^n$  e obtenha sua série de Taylor relativa a 0.

- 20) Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  função par. Prove que na expressão da fórmula de Taylor relativa a 0 não aparecem as derivadas ímpares em 0. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções ímpares.

- 21) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^k$  tal que  $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$ . Prove que existe  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^{n-k}$  tal que  $f(x) = (x-a)^k g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

- 22) Seja  $f : (a-\delta, a+\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  função de classe  $C^\infty$  tal que existem constantes  $a_0, \dots, a_n, \dots$  tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad (8)$$

Prove que  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$  é a série de Taylor de  $f$  relativa a  $a$ .

- 23) Prove o método de Newton das aproximações sucessivas. Mostre que o mesmo converge quadraticamente. Aplique o método ao cálculo aproximado de  $\sqrt[3]{a}$ .