3^a Lista de Exercícios de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

1. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ harmônica no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, isto é $f \in C^2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ em todos os pontos de U. Suponha que os pontos críticos de f são todos não-degenerados. Mostre que f não possui máximos nem mínimos locais.

2. Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável num aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$. Prove que se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f''(x) = g''(x)$ para todo x$\in U$ então $f = g$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, com $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $f(x, y) = g(x, y) \cdot x \cdot y$ para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. (Unicidade da fórmula de Taylor) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação k vezes diferenciável. Sejam $\phi_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ transformações j-lineares e simétricas tais que
$$f(a + h) = f(a) + \phi_1(h) + \phi_2(h, h) + \ldots + \phi_k\left(h^{(k)}\right) + r_k(h),$$
onde
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{||h||^k} = 0.$$
Então $\phi_j = \frac{f^{(j)}}{j!}$.

5. Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no aberto U. Dado $z_0 \in U$, um ponto crítico de f, ponha $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0)$, $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_0)$ e $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0)$. Exprima, em termos de a, b e c a condição para que z_0 seja não degenerado. Admitindo-a satisfeita, obtenha condições adicionais para que z_0 seja um máximo, um mínimo ou um ponto de sela.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $|f'(t)| \le k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina uma aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pondo $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ sobre si mesmo.

7. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle > 0$ para $x \in U$ e $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer então f é injetiva. Se $f \in C^1$ então f é um difeomorfismo de U sobre um subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Dê um exemplo em que $U = \mathbb{R}^m$ mas f não é sobrejetiva.

8. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que para todo $x \in \mathbb{R}^m$ temos que $f'(x)$ é uma isometria (isto é, $||f'(x) \cdot v|| = ||v||$) na norma euclidiana. Então f é uma isometria (isto é, $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$). Conclua que existem uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^m$ tais que $f(x) = T(x) + a$.

9. Verifique que toda imersão é um homeomorfismo sobre sua imagem. E toda submersão é uma aplicação aberta, *i.e.* imagem de aberto é aberto.

10. Dê exemplos, em $\mathbb{R}^2$, de uma aplicação C^∞ aberta que não é uma submersão e de uma aplicação C^∞ injetiva que não é uma imersão.

11. Se $f : U \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tem posto 3 em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^4$ então $|f(x)|$ não assume valor máximo para $x \in U$.

12. Se $f : U \to \mathbb{R}^m$ é uma submersão de classe C^k, $(k \geq 1)$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+p}$, e $g : f(U) \to \mathbb{R}^n$ é tal que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^k então g é de classe C^k.