1^a Lista de Exercícios de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

Março/2017

1. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão m. Prove que existem $n-m$ funcionais lineares $f_1, f_2, \ldots, f_{(n-m)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \ldots = f_{(n-m)}(x) = 0\}$. Conclua que existe uma aplicação linear sobrejetiva $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(n-m)}$ tal que $E = \ker A$.

2. Existe em $\mathbb{R}^3$ um produto interno tal que $< e_1, e_1 >= 2, < e_2, e_2 >= 3, < e_3, e_3 >= 4, < e_1, e_2 >= 0$ e $< e_2, e_3 >=< e_1, e_3 >= 1$. Ache uma base ortonormal para esse produto interno.

3. O fecho de todo conjunto é um conjunto fechado.

4. $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se e somente se, para todo $Y \subset X$ tem-se que $f(X \cap \overline{Y}) \subset \overline{f(Y)}$.

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ contínuas no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq g(a)$ então existe uma bola $B_r(a)$ tal que $x, y \in B_r(a)$ implica que $f(x) \neq g(x)$.

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua em $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Se $f(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta, x \in X$ então $f(x) > 0$.

7. Estabeleça um homeomorfismo entre o cone
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$
e o plano $\mathbb{R}^2$.

8. Estabeleça um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e $S^n \times \mathbb{R}$.

9. O quadrante $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ é homeomorfo ao semiplano superior $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$.

10. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = \frac{(x^2 - y)y}{x^4}$$

se $0 < y < x^2$ e $f(x, y) = 0$ nos demais pontos. Prove que o limite de $f(x, y)$ é zero quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de qualquer reta que passe pela origem, mas não se tem que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Os próximos exercícios se referem ao livro do Spivak "Calculus on Manifolds". Alguns são fáceis, mas todos devem ser resolvidos!

1. 1-2 a 1-13.
2. 1-15 a 1-19, 1-21 e 1-22.
3. 1-26, 1-28.