3^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

22 de junho de 2017

Nome:____

Escolha 4 dentre as 6 questões abaixo. Boa prova!

1. Demonstre o teorema de Stokes.

2. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para algum $a \in U$, seja $f'(a)$ um isomorfismo. Mostre que $\lim_{r\to 0} \frac{vol\ f(B[a;r])}{vol\ B[a,r]} = |\det f'(a)|$. Se $f'(a)$ não for um isomorfismo então o limite é zero.

3. Mostre que a 1-forma $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$ em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ é fechada mas não é exata. Dê um exemplo de uma variedade compacta com bordo com um forma volume exata. Porém, se M for compacta e $\partial M = \emptyset$ então nenhuma forma volume é exata.

4. Seja M uma variedade diferenciável k-dimensional. Mostre que M é orientável se e somente se existe uma forma volume (não-degenerada).

5. Seja $M \subset \mathbf{R}^n$ uma superfície diferenciável k-dimensional compacta. Defina a integral de uma k-forma ω em M. Mostre que essa definição não depende das parametrizações e da partição da unidade utilizadas.

6. Mostre que se uma variedade diferenciável M for simplesmente conexa então toda 1-forma fechada ω é exata.