2^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

18/maio/2017

Nome:____

Escolha 5 dentre as 9 questões abaixo. Boa prova!

1. Mostre que são equivalentes:

   a) Teorema da aplicação inversa;

   b) Forma local da imersão (ou submersão);

   c) Teorema da aplicação implícita.

2. Se $M \subset \mathbf{R}^{m+k}$, $mk > 0$, é uma superfície diferenciável de dimensão m, tal que admite k campos vetoriais ortogonais $N_1(x), \ldots, N_k(x)$ l.i. em T_xM para todo $x \in M$, então M é orientável. Conclua que imagens inversas de valores regulares são sempre variedades orientáveis.

3. Usando o argumento de multiplicadores de Lagrange, determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) =< x, y >$, restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$.

4. Seja $M \subset \mathbf{R}^n$ uma superfície diferenciável. Escolha um item abaixo:

   a) Mostre que o fibrado tangente TM é orientável.

   b) Mostre que o fibrado ortogonal $TM^{\perp}$ é orientável.

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que o teorema do posto sempre se aplica em pontos em um subconjunto aberto e denso em U. (Sug: para cada $r = 0, 1, \ldots, p = \min\{m, n\}$, seja A_r o interior do conjunto de pontos nos quais f tem posto r. Então mostre que o aberto $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p$ é denso em U).

6. Considere o seguinte sistema definido no aberto $U = (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbf{R}^2$:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{5}\ln(y + e^2) = a_1 \\ \\ y + \frac{1}{7}\mathrm{sen}(x) + 1 = a_2. \end{cases}$$

Mostre que esse sistema tem uma única solução $(x_0, y_0) \in U$ quando $a_1 = \frac{2}{5}$ e $a_2 = 1$.

7. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ \\ wxy - xyz = 0. \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos de $w = (y, z)$ e $x = x(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (1, 2, 1, 1)$. Calcule as derivadas parciais de w e de x nesses pontos.

8. Seja $\mathbf{R}^{n^2}$ o conjunto das matrizes reais $(x_{ij})_{n\times n}$. Seja $f : \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \det(x)$. Mostre que os valores máximos e mínimos de f na esfera

$$\sum_{i,j} (x_{i,j})^2 = n$$

são 1 e -1, respectivamente, os quais são atingidos em matrizes ortogonais.

9. Mostre que se uma variedade diferenciável conexa não-orientável puder ser coberta com duas parametrizações $\phi_1 : V_1 \to W_1 \subset M$ e $\phi_2 : V_2 \to W_2 \subset M$ então a interseção $W_1 \cap W_2$ tem pelo menos duas componentes conexas.