1^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

06/abril/2017

Nome:____

Boa prova!

1. Seja K um conjunto compacto de $\mathbf{R}^n$. Mostre que toda função contínua $f : K \to \mathbf{R}^m$ é uniformemente contínua. Vale a recíproca?

2. **a)** Mostre que se uma aplicação f entre espaços euclidianos é tal que $|f(x)| \leq K|x|^2$ para qualquer $K \geq 0$ então f é derivável na origem. Calcule $f'(0)$.

   b) Dê um exemplo de uma função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que existe

   $$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   e f é descontínua em $\mathbf{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$.

3. Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{N}$, seja $B : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_3}$ uma transformação bilinear, $T : \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_2}$ uma transformação linear e $f : \mathbf{R}^{n_3} \to \mathbf{R}^{n_4}$ uma aplicação de classe C^2. Descreva, interpretando claramente suas componentes, a segunda derivada da composição $f(B(x, Ty)) : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_4}$. Verifique na sua resposta se vale o teorema de Schwartz.

4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $|f(x)|$ é constante em U então o determinante do jacobiano de f é identicamente nulo.

5. Seja $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ uma função contínua possuindo todas as derivadas direcionais em todos os pontos de $\mathbf{R}^m$. Se $\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ para todo $|u| = 1$ então existe um ponto $a \in \mathbf{R}^m$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $v \in \mathbf{R}^m$.