2^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

18/maio/2017

Nome: Gabarito

Escolha 5 dentre as 9 questões abaixo. Boa prova!

1. Mostre que são equivalentes:
   a) Teorema da aplicação inversa;
   b) Forma local da imersão (ou submersão);
   c) Teorema da aplicação implícita.
2. Se $M \subset \mathbf{R}^{m+k}$, $mk > 0$, é uma superfície diferenciável de dimensão m, tal que admite k campos vetoriais ortogonais $N_1(x), \ldots, N_k(x)$ l.i. em T_xM para todo $x \in M$, então M é orientável. Conclua que imagens inversas de valores regulares são sempre variedades orientáveis.
3. Usando o argumento de multiplicadores de Lagrange, determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $f(x,y) = < x, y >$, restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$.
4. Seja $M \subset \mathbf{R}^n$ uma superfície diferenciável. Escolha um item abaixo:
   a) Mostre que o fibrado tangente TM é orientável.
   b) Mostre que o fibrado ortogonal $TM^\perp$ é orientável.
5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Mostre que o teorema do posto sempre se aplica em pontos em um subconjunto aberto e denso em U. (Sug: para cada $r = 0, 1, \ldots, p = \min\{m, n\}$, seja A_r o interior do conjunto de pontos nos quais f tem posto r. Então mostre que o aberto $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p$ é denso em U).
6. Considere o seguinte sistema definido no aberto $U = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbf{R}^2$:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{5}\ln(y + e^2) = a_1 \\ y + \frac{1}{7}\text{sen}(x) + 1 = a_2. \end{cases}$$

Mostre que esse sistema tem uma única solução $(x_0, y_0) \in U$ quando $a_1 = \frac{2}{5}$ e $a_2 = 1$.

7. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6 = 0 \\ \\ wxy - xyz = 0. \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos de $w = (y, z)$ e $x = x(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (1, 2, 1, 1)$. Calcule as derivadas parciais de w e de x nesses pontos.

8. Seja $\mathbf{R}^{n^2}$ o conjunto das matrizes reais $(x_{ij})_{n \times n}$. Seja $f : \mathbf{R}^{n^2} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \det(x)$. Mostre que os valores máximos e mínimos de f na esfera

$$\sum_{i,j} (x_{i,j})^2 = n$$

são 1 e -1, respectivamente, os quais são atingidos em matrizes ortogonais.

9. Mostre que se uma variedade diferenciável não-orientável puder ser coberta com duas parametrizações $\phi_1 : V_1 \to W_1 \subset M$ e $\phi_2 : V_2 \to W_2 \subset M$ então a interseção $W_1 \cup W_2$ tem pelo menos duas componentes conexas.

Q1) Dada na teoria (nos notas de aula)

Q2) idem

Q3) $\nabla f = (y, x)$ e $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto |x|^2 + |y|^2$$

$M = S^{2n-1} = \varphi^{-1}(1)$ com $\nabla \varphi = 2(x, y)$.

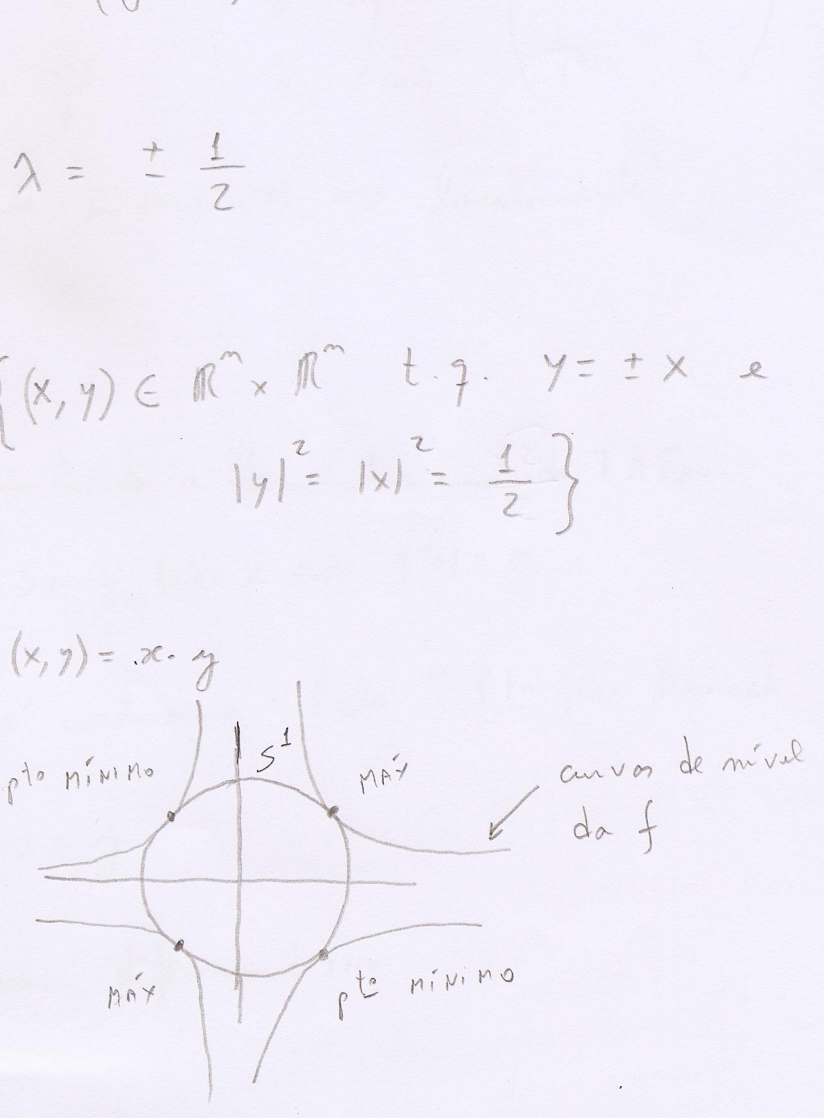
Pelo critério dos multiplicadores de Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla \varphi \iff (y, x) = 2\lambda (x, y)$$

$$\iff \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda^2 x \\ y = 2\lambda^2 y \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$\therefore$ Ptos críticos são $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ t.q. } y = \pm x \text{ e } |y|^2 = |x|^2 = \frac{1}{2} \right\}$

<u>Exemplo:</u> Se $n = 1$, $f(x, y) = x \cdot y$



Q4) (clássica) na teoria

Q5) Prop. 10.3 Elon L. Lima, pág 103 "Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$"

Q6) Considere $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x,y) = \left(x + \frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{5}\ln(y+e^2) - \frac{2}{5},\ y + \frac{1}{7}\operatorname{sen} x \right)$$

Então $f(0,0) = (0,0)$ $\therefore$ $(0,0)$ é uma solução em $\mathcal{U}$.

Unicidade local:

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x^3}{30} & \frac{1}{5(y+e^2)} \\ \frac{\cos x}{7} & 1 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5e^2} \\ \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

é isomorfismo, $\therefore$ é localmente inversível $\Rightarrow$ localmente $(0,0)$ é a única solução.

Unicidade da solução em $\mathcal{U}$: Imitando a demonstração do TAInv.

Considere $g_y(x) = x - f(x) + y$. Se $g_y(x) = x \iff f(x) = y$.

$|g'(x)| \leq 1/2$ em $\overline{\mathcal{U}}$ $\therefore$ é contração. Pelo T. Pto fixo Banach

$\forall y \in \mathcal{U}, \exists!\, x \in \overline{\mathcal{U}}$ t.q. $f(x) = y$.

$\therefore$ f é injetora $\therefore$ é um difeomorfismo.

~~f de fato é injetora em $\mathcal{U}$ ($\therefore$ é difeo) porque pela desigualdade do valor médio aplicada nos difeos locais que cobrem um caminho entre b_1 e $b_2 \in \mathrm{Im}(f)$ temos~~

$$\cancel{|g(b_1) - g(b_2)| \leq \sup_{x \in \mathcal{U}} |g'(x)| \cdot |b_1 - b_2|}$$

~~i.e., a inversa é Lipschitz $\therefore$ f é injetora.~~

Q7) Rearranjando as variáveis:

$$f(y,z,w,x) = \left(w^2 + 2x^2 + y^2 - z^2 - 6,\ wxy - xyz\right)$$

e

$$f' = \begin{pmatrix} 2y & -2z & 2w & 4x \\ wx - xz & -xy & xy & wy - yz \end{pmatrix}_{(2,1,1,1)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$D_{(w,x)} f = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ neste ponto } \therefore \text{ inversível.}$$

TAplic. Implic. $\Rightarrow \exists\, \xi(y,z) \in C^\infty$ t.q. $f(y, z, \xi_1(y,z), \xi_2(y,z)) \equiv 0$

$$\text{e} \quad \xi'(y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \end{pmatrix} = -(D_2 f)^{-1} \cdot D_1 f$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q8) Feita em sala.

Q9) Se $W_1 \cap W_2$ tem uma única componente conexa, então, por continuidade, $\det(\phi_1^{-1} \circ \phi_2) > 0$ em $W_1 \cap W_2$ (absurdo, senão M é orientável) ou $\det(\phi_1^{-1} \circ \phi_2) < 0$ em $W_1 \cap W_2$.

No segundo caso, inverta a orientação de ϕ_1 e M fica com atlas orientável, absurdo. $\therefore$ $W_1 \cap W_2$ tem pelo menos 2 componentes conexas, pelo menos uma com $\det(\phi_1^{-1} \circ \phi_2) > 0$ e pelo menos uma com $\det(\phi_1^{-1} \circ \phi_2) < 0$

$\blacksquare$