1^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

06/abril/2017

Nome: Gabarito

Boa prova!

1. Seja K um conjunto compacto de $\mathbf{R}^n$. Mostre que toda função contínua $f : K \to \mathbf{R}^m$ é uniformemente contínua. Vale a recíproca?

2. **a)** Mostre que se uma aplicação f entre espaços euclidianos é tal que $|f(x)| \leq K|x|^2$ para qualquer $K \geq 0$ então f é derivável na origem. Calcule $f'(0)$.

   b) Dê um exemplo de uma função $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que existe
   $$f'(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   e f é descontínua em $\mathbf{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$.

3. Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{N}$, seja $B : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_3}$ uma transformação bilinear, $T : \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_2}$ uma transformação linear e $f : \mathbf{R}^{n_3} \to \mathbf{R}^{n_4}$ uma aplicação de classe C^2. Descreva, interpretando claramente suas componentes, a segunda derivada da composição $f(B(x, Ty)) : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_4}$. Verifique na sua resposta se vale o teorema de Schwartz.

4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $|f(x)|$ é constante em U então o determinante do jacobiano de f é identicamente nulo.

5. Seja $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ uma função contínua possuindo todas as derivadas direcionais em todos os pontos de $\mathbf{R}^m$. Se $\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0$ para todo $|u| = 1$ então existe um ponto $a \in \mathbf{R}^m$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ para todo $v \in \mathbf{R}^m$.

Q1) Feito em aula (Teo. 21a pág 46 no Elon vol. II).

Se toda função contínua for U.C. $\not\Rightarrow$ K seja compacto.

Ex: $X = \mathbb{N}$ ou $X \neq \phi$ só com pontos isolados.

Q2) a) Use $T \equiv 0$ e tome $r(v) = f(v)$ então

$$f(0+v) = \cancelto{0}{f(0)} + \cancelto{0}{Tv} + r(v)$$

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

b)

$$f((1,1)+(x,y)) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{f(1,1)} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r(x,y)$$

Aqui coloca a descontinuidade.

com $r(x,y) = d(x) \cdot |(x,y)|^2$ onde $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fç de Dirichlet.

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Q3) Seja $a = (a_1, a_2)$ com $a_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ e $a_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

$$B(x, Ty) = B \circ (Id_{n_1}, T_{n_2})(x,y) \quad \text{então}$$

$$B'(a_1, Ta_2)(u_1, u_2) = B(a_1, Tu_2) + B(u_1, Ta_2)$$

Obs: Note que $B(x, Ty)$ por si só já é bilinear $\therefore$ não precisa da regra da cadeia.

E a segunda derivada:

$$B''(a_1, Ta_2)(u_1, u_2)(v_1, v_2) = B(u_1, Tv_2) + B(v_1, Tu_2) \qquad (**)$$

Agora para a composta (regra da cadeia)

$$f(B(a_1, Ta_2))'(u_1, u_2) = f'(B(a_1, T(a_2))) \cdot \Big[\underbrace{B(a_1, Tu_2) + B(u_1, Ta_2)}_{(*)}\Big]$$

produto

Para a segunda derivada, usando a regra da cadeia e a regra de Leibniz:

$$f(B(a_1, Ta_2))''(u_1, u_2)(v_1, v_2) = \frac{\partial}{\partial(v_1, v_2)}\Big[f(B(a_1, Ta_2))'(u_1, u_2)\Big] =$$

$$\underset{\text{(bilinear)}}{f''(B(a_1, Ta_2))}\Big[\underbrace{B(a_1, Tu_2) + B(u_1, Ta_2)}_{(*)}, \underbrace{B(a_1, Tv_2) + B(v_1, Ta_2)}_{(*)}\Big]$$

$$+ f'(B(a_1, Ta_2)) \cdot \Big[\underbrace{B(u_1, Tv_2) + B(v_1, Tu_2)}_{(**)}\Big]$$

Trocar (u_1, u_2) por (v_1, v_2) na fórmula acima não altera o resultado, já que f'' é simétrica. $\square$

Q4) $\langle f(x), f(x) \rangle = K$, derivando na direção v;

$$2\langle f'(x)\cdot v, f(x) \rangle = 0 \quad \forall v$$

Se $f(x) \equiv 0$, acabou.

Se $f(x) \neq 0 \Rightarrow \nexists v$ com $f'(x)v = f(x)$ i.e. $f'(x)$ não é sobrejetora $\Rightarrow \det(f'(x)) = 0$.

Q5) Vamos mostrar que o ponto de mínimo de $f\big|_{\overline{B(0,1)}}$ está no aberto $B(0,1)$.

De fato $\forall u \in S^{n-1}$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(u+hu) - f(u)}{h} > 0$

$\therefore \exists\, \delta(u) > 0$ t.q. $h \in (-\delta(u), 0) \Rightarrow f(u+hu) < f(u)$

$\therefore$ nenhum $u \in S^{n-1}$ é mínimo local $\boxtimes$/2

Se $a \in B(0,1)$ é o mínimo local de f então

$$\frac{\partial f(a)}{\partial v} = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad \boxtimes$$