Sobre o Limite Exponencial Fundamental

Estamos definindo o limite exponencial fundamental (LEF) como sendo o

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Demonstração: Mostramos primeiro a existência do limite para a sequência $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Vamos mostrar por indução que essa sequência é crescente e que é limitada por 3, i.e., 3 é uma cota superior do conjunto $\{x_n; n \in \mathbf{N}\}$. Portanto, pelo axioma do supremo, existe um supremo $e \leq 3$, para onde a sequência crescente está convergindo. Esse limite e é chamado de base do logaritmo de Napier.

Primeiro mostraremos que é limitado. De fato, para todo número natural n,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\frac{1}{3!}+\dots\frac{n!}{n^n}\frac{1}{n!}\\ &\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

E como $2^n \leq (n+1)!$ (exercício! por indução), então

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\frac{1}{2^{n-1}} \leq 3.$$

Agora mostraremos que a sequência é crescente (parte mais fácil!). De fato, se $n < m$ são números naturais então

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\left(\frac{n(n-1)}{n^2}\right)\frac{1}{2!}+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right)\frac{1}{3!}+\dots\left(\frac{n!}{n^n}\right)\frac{1}{n!}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\left(\frac{m(m-1)}{m^2}\right)\frac{1}{2!}+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}\right)\frac{1}{3!}+\dots\left(\frac{m!}{m^m}\right)\frac{1}{m!}.$$

Assim, os coeficientes de $\frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}\dots\frac{1}{m!}$ na segunda equação acima são sempre maiores que os da primeira equação. De fato, basta notar, para o coeficiente de $\frac{1}{3!}$, por exemplo, que

$$\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{m^3}\right) = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)$$

será maior que

$$\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right).$$

Finalmente precisa mostrar que se x for um número real com $n < x \leq n+1$ então o valor da função original $(1+1/x)^x$ está entre x_n e x_{n+1}, portanto, se a sequência converge,

então a função também converge quando x vai para infinito. Esta última parte pode ser feita inicialmente para os racionais, considerando uma nova sequência, não com passo 1, como antes, mas com passo $1/q$. I.e., tomando

$$x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{(n/q)}\right)^{(n/q)},$$

para todo $q \in \mathbf{N}$. Portanto, refazendo com cálculos parecidos, concluiríamos que a função original é crescente e converge para e nos racionais. Para terminar, use continuidade para mostrar que nos irracionais ela tem que convergir também para o mesmo limite.

□

Verifique agora que o limite exponencial fundamental acima é equivalente ao limite para menos infinito:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

De fato, basta usar a mudança de variável $x = -(t+1)$. Assim, $x \to -\infty \Rightarrow t \to +\infty$ use que

$$\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)$$

Da mesma maneira, usando a mudança de variável: $h = 1/x$ então $x \to \infty \Rightarrow h \to 0^+$ temos outra versão equivalente do LEF como limite lateral a direita:

$$\lim_{h\to 0^+}(1+h)^{1/h} = e.$$

Ou limite lateral a esquerda,

$$\lim_{h\to 0^-}(1+h)^{1/h} = e.$$

Portanto, os dois limites laterais, juntos, implicam que vale o limite

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h} = e.$$

O limite exponencial fundamental tambem é equivalente a

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

Basta tomar a mudança de variável $u = e^h - 1$ e $u \to 0$ então o limite fica

$$\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(u+1)} = 1$$

Exemplo 1: Mostre que

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \ln a$$

Exemplo 2: Mostre que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^2.$$