Lista 3 Análise I MA-502

1. Dados os subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ mostre que se $A \subset B$ então $A^\circ \subset B^\circ$ e $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Para um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, mostre que $A^\circ \subset \left(\overline{A}\right)^\circ$ e $\overline{(A^\circ)} \subset \overline{A}$. Dê exemplos de subconjuntos tais que essas inclusões não sejam igualdades.

3. Mostre que $A^\circ = \emptyset$ se e só se A^c é denso.

4. Mostre que $(A^c)^\circ = \left(\overline{A}\right)^c$ e que $\overline{(A^c)} = (A^\circ)^c$.

5. Sejam A e B abertos de $\mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $A + B = \{x + y \in \mathbb{R} : x \in A \text{ e } y \in B\}$ é aberto.

6. Prove que a união de dois fechados é fechada e que a interseção de dois abertos é aberta. Que acontece com a união de fechados e a interseção de abertos em general?.

7. Dê, **se possível**, exemplos de

   (a) um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A^\circ \neq \emptyset$ mas A não é aberto;

   (b) um conjunto A tal que $A^\circ \neq \left(\overline{A}\right)^\circ$;

   (c) um conjunto A tal que $\overline{(A^\circ)} \neq \overline{A}$;

   (d) um conjunto $A \neq \mathbb{R}$ que é ao mesmo tempo aberto e denso;

   (e) um conjunto $A \neq \mathbb{R}$ que é ao mesmo tempo fechado e denso;

   (f) um conjunto denso cujo interior é vazio;

   (g) conjuntos que não são nem abertos nem fechados.

8. Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e limitado. Mostre que $\sup F, \inf F \in F$.

9. Mostre, usando a definição, que as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas nos pontos a indicados:

   (a) $f(x) = |x|$ em $a = 0$ e $a = 1$.

   (b) $f(x) = x^3$ em $a = 0$ e $a = 3$.

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em $a = 1$.

   (d) $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ no ponto $a = 0$.

10. Sejam as funções $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in A$. Suponha que f e g sejam contínuas em a e mostre, diretamente a partir da definição de função contínua num ponto, que $f + g$ e $f \cdot g$ são contínuas em a.

11. Mostre que toda função polinomial $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ é contínua em $\mathbb{R}$.

12. Sejam as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e denote por A, B e C respectivamente os conjuntos dos pontos em que f, g e $f+g$ são contínuas. Mostre que $A \cap B \subset C$. Dê exemplos de funções em que $A \cap B \neq C$.

13. Para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja A o conjunto dos pontos em que f é contínua e B o conjunto dos pontos de continuidade de $|f|$. Mostre que $A \subset B$. Dê exemplo de uma função f em que $A \neq B$.

14. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Prove que o conjunto dos pontos de descontinuidade simples de f é enumerável.

15. Dado um conjunto compacto $C \subset \mathbb{R}$, seja $f : C \to \mathbb{R}$ uma função contínua nesse conjunto. Denote por $f(C)$ a imagem de f. Mostre que $f(C)$ é um conjunto limitado superior e inferiormente em $\mathbb{R}$. Mostre que existem $x, y \in C$ tais que $\sup f(C) = f(x)$, $\inf f(C) = f(y)$.

16. Dê exemplo de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um subconjunto fechado tal que $f(F)$ não é fechado. (Compare com o exercício anterior.)

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que o conjunto das soluções da equação $f(x) = 0$ é fechado e que o conjunto das soluções da inequação $f(x) > 0$ é um conjunto aberto.

18. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ vale $f(x) \neq 0$. (Use o exercício anterior.)

19. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ vale $f(x) \neq g(x)$. (Use o exercício anterior.)

20. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é fechado

21. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = -1$ e $f(10) = 1$. Considere o conjunto $A = \{x \in [0, 10] : f(x) < 0\}$. Mostre que $\sup A$ existe e que $f(\sup A) = 0$.

22. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que se $\forall q \in \mathbb{Q}$, $f(q) = g(q)$ então $f = g$ (isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$)

23. Prove que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções continuas e $D \subset \mathbb{R}$ um subconjunto denso tal que $f|D = g|D$, então $f = g$.

24. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(0) = -1$, $f(10) = 2\pi$, $g(0) = \pi$ e $g(10) = -10$. Prove que existe $x \in (0, 10)$ tal que $f(x) = g(x)$.

25. Prove que a imagem de um compacto por uma função continua é compacto. Prove que a imagem de um conexo por uma função continua é conexo.

26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$ se $mdc(m, n) = 1$. Prove que f é continua em todo número irracional e que tem uma descontinuidade simples em cada número racional.