Lista 2 Análise I MA-502

1. Prove que toda sequência convergente é de Cauchy.
2. Mostre, a partir das definições, que se a sequência (x_n) é de Cauchy então qualquer subsequência (x_{n_k}) também é de Cauchy.
3. Dê, se possível, exemplo(s) de
   (a) Uma sequência para a qual nenhuma subsequência é de Cauchy.
   (b) Uma sequência para a qual nenhuma subsequência é limitada.
4. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em $\mathbb{R}$ que satisfazem
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, \ |x_n - y_n| < \epsilon.$$
   Mostre que (x_n) é de Cauchy se e somente se (y_n) é de Cauchy.
5. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy. Mostre que as sequências $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ e $(|x_n|)$ também são de Cauchy.
6. Suponha que uma sequência (x_n) de números reais satisfaz
$$\forall n \in \mathbb{N}; |x_{n+2} - x_{n+1}| < \kappa \, |x_{n+1} - x_n| \, ,$$
   onde $0 \leq \kappa \leq 1$. Mostre que (x_n) é de Cauchy. (sugestão: avalie a distância $|x_{n+k} - x_n|$).
7. Diga quais dos resultados abaixo exigem, para sua demonstração, o axioma da completude (axioma do supremo).
   (a) Toda sequência de Cauchy converge.
   (b) Se uma sequência tem limite então ela é de Cauchy.
   (c) Se uma sequência é crescente e limitada superiormente então ela é convergente.
   (d) Toda série absolutamente convergente é convergente.
   (e) Se uma sequência tem limite então ela é limitada.
   (f) Toda sequência limitada tem algum ponto de acumulação.
8. Seja (x_n) uma sequência convergente. Defina uma nova sequência (s_n) por $s_n = \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$. Prove que (s_n) é convergente.
9. Seja (x_n) uma sequência. Defina uma nova sequência (y_n) por $y_n = x_{n+1} - x_n$. Mostre que a série $\sum y_n$ converge se e só se existe $\lim_{n\to\infty} x_n$.
10. Seja (x_n) uma sequência monótona decrescente tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Prove que
$$\sum (-1)^{n+1} x_n$$
    é uma série convergente.

11. Prove que uma serie de termos não negativos converge se e somente se suas somas parciais estão limitadas.

12. Seja (x_n) uma sequência monótona não crescente de termos não negativos. Prove que $\sum x_n$ converge se e somente se $\sum 2^n x_{2^n}$ converge.

13. Mostre que a serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

diverge.

14. Mostre que se $r > 1$ a serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$$

converge.

15. Seja (x_n) uma sequência monótona decrescente tal que $\sum x_n$ converge. Prove que $\lim_{n\to\infty} n x_n = 0$.

16. Se $\sum x_n$ é absolutamente convergente então $\sum x_n^2$ é convergente.

17. Determine se a série $\sum (\frac{\log n}{n})^n$ é convergente usando os testes de Cauchy e D Alembert.

18. Dê exemplos de séries divergentes $\sum x_n$ e $\sum y_n$ tal que $\sum (x_n + y_n)$ seja convergente.

19. Dê exemplo de uma série $\sum_{n\geq 1} x_n$ e de uma subsequência (x_{n_k}) da sequência de seus termos, satisfazendo cada um dos casos abaixo:

    (a) $\sum_{n\geq 1} x_n$ diverge e $\sum_{k\geq 1} x_{n_k}$ converge.
    (b) $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge e $\sum_{k\geq 1} x_{n_k}$ diverge.

20. O seguinte resultado é de B. Riemann: Seja (x_n) uma sequência tal que a serie $\sum x_n$ converge e não é absolutamente convergente e $a \leq b$ números reais. Então existe uma reordenação x_{n_k} ($n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijetiva) tal que:

$$\liminf_{k\to\infty} \widetilde{s}_k = a \quad e \quad \limsup_{k\to\infty} \widetilde{s}_k = b,$$

onde $\widetilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}$ são as somas parciais do serie reordenada. **DICA**: As series de termo geral $p_n = \frac{1}{2}(|x_n| + x_n)$ e $q_n = \frac{1}{2}(|x_n| - x_n)$ são divergentes. Considere P_i o i-esimo termo n ao negativo da sequencia (x_n) e Q_i o valor absoluto do i-esimo termo negativo da sequencia (x_n). Claramente $\sum P_i$ e $\sum Q_i$ divergem. Construir sequencias (m_n) e (k_n) tais que a serie

$$P_1 + ... + P_{m_1} - Q_1 - ... - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + ... + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - ... - Q_{k_2} + ...$$

que é uma reordenação de (x_n) verifica o resultado (Ver o livro de W. Rudin).