Espaços Métricos: lista de exercícios 5

1. Seja $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} :$ continuas$\}$ o conjunto das funções de $[0,1]$ a valores reais contínuas, com a métrica
$$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}.$$
Calcular a distância entre $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$.

2. Seja X o espaço das sequências reais $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}\}$ provido da métrica
$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \min\{|x_n - y_n|, 1\}.$$
Prove que (X,d) é um espaço métrico. Provar que uma sequencia $((x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}})_{i\in\mathbb{N}}$ em X converge a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ see para todo $n \in \mathbb{N}$,
$$\lim_{i\to\infty} x_n^{(i)} = x_n.$$

3. Provar que a sequencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em l^2 definida por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots)$ converge a $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots)$ em l^2.

4. Seja (X,d) um espaço métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequencia em X e $x \in X$. Prove que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ see
$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = x.$$

5. Seja (X,d) um espaço métrico e $x, y \in X$. Se x y sao elemetos de X, então existem $r_x, r_y > 0$ tais que $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \phi$.

6. Sejam $A \subset [0,1]$, $A \neq \phi$ e $F = \{f \in C([0,1]) : f(t) = 0$ para todo $t \in A\}$.

   1) Provar que F é fechado na topologia da convergencia uniforme.

   2) Mostrar que F não é fechado na topologia da norma L^1. DICA: Considere $A = \{0\}$,
$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{1}$$
   Provar que $f_n \in C([0,1])$ e que $\lim_{n\to\infty} d_1(1, f_n) = 0$, onde $1(t) = 1$ para todo $t \in [0,1]$.

7. Seja X o conjunto das sequencias limitadas de números reais com a métrica,
$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$
Prove que o subconjunto das sequencias convergentes é fechado.

8. Considere em $\mathbb{R}^2$ com a métrica ususal o conjunto $A = \{(x,y) : y = \sin(x), 0 < x \le 1\}$. Prove que
$$\overline{A} = A \cup \{(0,y) : -1 \le y \le 1\}.$$

9. Seja (X,d) um espaço métrico e $A \subset X$. Definimos o *diametro de* A como
$$diam(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}.$$
Prove que se $A \subset B$ então $diam(A) \le diam(B)$.

10. Seja (X, d) um espaço métrico, $x \in X$ e $A \subset X$. Definimos o *a distancia de* x a A como

$$dist(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

1) Prove que se $x, y \in X$ então

$$|dist(x, A) - dist(x, B)| \leq d(x, y).$$

2) Prove que $x \in X - A$ é um ponto de acumulação de A see $dist(x, A) = 0$.

3) Sejam $A, B \subset X$ e $x \in X$. Provar que

$$dist(A, B) \leq dist(x, A) + dist(x, B).$$

11. Seja (X, d) um espaço métrico. Provar que o espaço métrico (X, e) definido por

$$e(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

tem os mesmos abertos que (X, d).

12. Seja (X, d) um espaço métrico, A e B conjuntos fechados disjuntos de X. Provar que existem abertos disjuntos U e V de X tais que $A \subset U$ e $B \subset V$. Isto implica que $dist(A, B) > 0$?.

13. Seja (X, d) um espaço métrico e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequencia em X. Provar que existe uma subsequencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$ see $dist(x, \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

14. Constroir uma métrica em $\mathbb{R}$ tal que a sequencia $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a um valor diferente de zero.

15. Provar que toda sequencia limitada em $\mathbb{R}$ tem uma subsequencia convergente. DICA: Ver limite superior e inferior.

16. Uma sequencia de pontos em um espaço métrico discreto converge see existe um $n \in \mathbb{N}$ a partir do qual a sequencia é constante.