

### **3a. Lista de Exercícios**

MA-604 Topologia dos Espaços Métricos

1. Dê exemplo de um conjunto limitado  $X \subseteq \mathbb{R}$  tal que não existam  $x$  e  $y$  com  $|x - y| = \text{diam}(X)$ .
2. Sejam  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas no ponto  $a \in M$ . Se  $f(a) < g(a)$  então existe  $\delta > 0$  tal que, para  $x, y \in M$  satisfazendo  $d(x, a) < \delta$  e  $d(y, a) < \delta$  então  $f(x) < g(y)$ .
3. Sejam  $f, g : M \rightarrow N$  contínuas no ponto  $a \in M$ . Se  $f(a) \neq g(a)$  então existe uma bola aberta  $B$  de centro em  $a$  tal que  $f(B) \cap g(B) = \emptyset$ . Em particular, se  $x \in B$  então  $f(x) \neq g(x)$ .
4. Sejam  $f, g : M \rightarrow N$  contínuas. Dado  $a \in M$ , suponha que toda bola de centro  $a$  contenha um ponto  $x$  tal que  $f(x) = g(x)$ . Conclua que  $f(a) = g(a)$
5. Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, definida num subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$ . Suponha que  $P = \{x \in X; f(x) > 0\}$  é limitado e não-vazio. Sejam  $a = \inf P$  e  $b = \sup P$ . Prove que, se  $a \in X$  e  $b \in X$  então  $f(a) \geq 0$  e  $f(b) \geq 0$ .

#### **Exercícios Extras**

1. Elon, Cap. 1 , S 1, no. 9 (álgebra linear).
2. Elon, Cap. 1 , S 1, no. 17.
3. Elon, Cap. 1 , S 1, no. 19.
4. Elon, Cap. 1 , S 2, no. 24.
5. Elon, Cap. 1 , S 3, no. 26.
6. Elon, Cap. 1 , S 5, no. 42.
7. Elon, Cap. 2 , S 1, no. 22.
8. Kaplansky, Cap.4, pag.82, no.6

#### **Exercícios Especiais**

1. Elon, Cap. 1 , S 4, no. 40 e 41.
2. Elon, Cap. 1 , S 5, no. 46 e 47.
3. Elon, Cap. 2 , S 2, no. 27 e 28.
4. Kaplansky, Cap 4, pag. 83, no. 9 e 10.