Espaços Métricos: lista de exercícios 2

1. Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$ não vazio. Prove que a função distância $d_A : X \to [0, \infty)$ definida por
$$d_A(x) = dist(x, A)$$
é uma função contínua.

2. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos e $f : X \to X'$ uma função aberta e injetiva. Provar que $f^{-1} : f(X) \to X$ é contínua.

3. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos e $f : X \to X'$. Então f é contínua se e somente se
$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times X'$$
é fechado. Aqui $X \times X'$ é provido de uma métrica produto.

4. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos e $f : X \to X'$. Provar que f é aberta se e somente se para qualquer bola aberta B de X temos que $f(B)$ é aberto.

5. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos e $f\ , g : X \to X'$ funções contínuas. Provar que
$$\{x \in X : f(x) = g(x)\}$$
é fechado.

6. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos, $f\ , g : X \to X'$ funções contínuas e $Q \subset X$ um conjunto denso. Provar que se para todo $x \in Q$, $f(x) = g(x)$ então $f = g$.

7. Seja (X, d) um espaço métrico e $A,\ B \subset X$ fechados não vazios disjuntos. Prove que existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tais que $A = f^{-1}(0)$ e $B = f^{-1}(1)$.

8. 1) Sejam $C^1([0, 1])$ o subespaço de $C([0, 1])$ (com a norma do supremo) das funções que tem derivada contínua no intervalo $[0, 1]$. Provar que $I : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ definida por $I(f) = f$ não é contínua.

   2) Se consideramos $C^1([0, 1])$ com a norma
$$\|f\|_{\infty,1} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$$
e $C([0, 1])$ com a norma do sup, I é contínua?

9. Sejam (f_n) uma sequência de funções em $C^1([a, b])$. Suponha que (f_n) converge pontualmente a f e que (f'_n) converge uniformemente. Provar que f é diferenciável e que $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$ para cada $x \in [a, b]$.

10. Achar uma sequência (f_n) em $C^1([0, 1])$ tal que (f_n) converge uniformemente a f uma função em $C^1([0, 1])$ e (f'_n) converge pontualmente a uma função diferente de f'.

11. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos e $f : X \to X'$. Suponha que existe $k > 0$ tal que $d'(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in X$. Provar que f é injetiva e que f^{-1} é Lipschitz.

12. Sejam E e F espaços normados e $f : E \to F$ uma transformação linear. Provar que são equivalentes:

    1) f é contínua.

    2) f é contínua no $0 \in E$.

    3) Existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c|x|$ para todo $x \in E$.

    4) Existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ para quaisquer $x,\ y \in E$.

13. Dar um exemplo de uma transformação linear descontínua.

14. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos e $f_n : X \to X'$ uma sequência de funções uniformemente contínuas que converge uniformemente a $f : X \to X'$. Provar que f é uniformemente contínua.

15. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos e $A \subset X$ um conjunto denso. Se $f : X \to X'$ é continua tal que $f|A$ é uniformemente continua, então f é uniformemente continua.

16. Mostre que todo espaço métrico $\mathcal{M}$ pode ser imerso isometricamente no espaço vetorial normado E $= \mathcal{B}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. Sugestão (não necessariamente é o melhor caminho): veja o exercício 1 e divida o problema no caso em que $\mathcal{M}$ é limitado, e depois expanda para o caso em que $\mathcal{M}$ não é limitado.

17. Seja E um espaço vetorial normado com produto interno. Dada uma transformação linear $T : E \to E$, prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

    1) T é imersão isométrica;

    2)$\|T.x\| = \|x\|$ para todo $x \in E$;

    3) $< T.x, T.y >=< x, y >$ para todo $x, y \in E$.

    Prove também que se E tem dimensão finita, então nessas condições, T é isometria.

18. Seja $X \subseteq \mathbb{R}^m$ subespaço vetorial não vazio e $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica. Mostre que existe uma imersão isométrica $\widetilde{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que $\widetilde{f}|_X = f$.

19. Usando a imersão $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}n = 1$ dada por $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1, x_1, \ldots, x_n)$, represente matricialmente uma rotação por $\pi/4$ no eixo vertical (sentido antihorário no plano horizontal) seguido de uma translação pelo vetor $(1, 1, 1)$. Qual a sua inversa em termos de rotação composto com translação (nesta ordem)?

20. Toda métrica é equivalente a alguma métrica que é limitada.

21. Mostre que $(C[0, 1], \|\cdot\|_{\sup})$ é isométrico a $(C[a, b], \|\cdot\|_{\sup})$, com $a < b \in \mathbb{R}$.