Espaços Métricos: lista de exercícios 1

1. Seja (X, d) um espaço métrico. Prove que para quaisquer $x_1, \cdots, x_n \in X$ temos que:
$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

2. Seja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ uma função côncava, isto é para quaisquer x e y em $[0, \infty)$ e $s \in [0, 1]$ temos que
$$f(sx + (1 - s)y)) \geq sf(x) + (1 - s)f(y).$$
Prove que se $f(0) = 0$, f côncava e crescente com d uma métrica então $f \circ d$ também é uma métrica.

3. Prove que uma função $f : [0, \infty) \to\to [0, \infty)$ duas vezes derivável tal que $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in [0, \infty)$ é côncava.

4. Prove que se (X, d) é um espaço métrico então (X, d_1), (X, d_2), (X, d_3) são espaços métricos. Onde
$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\} \\ d_2(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \\ d_3(x, y) &= \sqrt{d(x, y)}. \end{aligned}$$

5. Prove a desigualdade de Hölder. Use-a para provar que $(\mathbf{R}^n, d_p)$ é um espaço métrico, onde $1 \leq p \leq \infty$ com a métrica
$$d_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$
e para $p = \infty$,
$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \cdots, n\}.$$

6. Seja X um conjunto não vazio e $F_b(X) = \{f : X \to \mathbf{R} : \text{ limitadas}\}$ o conjunto das funções de X a valores reais limitadas. Definimos $d_\infty : F_b(X) \times F_b(X) \to [0, \infty)$ por
$$d_\infty(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}.$$
Provar que $(F_b(X), d_\infty)$ é um espaço métrico.

7. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Prove que $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica em E.

8. Seja (X, d) um espaço métrico e $Y \subset X$. Provar que $d_Y = d|_{Y \times Y}$ é uma métrica (chamada métrica induzida por d em Y como subespaço).

9. Sejam $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$ espaços métricos. Prove que $q_j : \Pi_{i=1}^n X_i \times \Pi_{i=1}^n X_i \to [0, \infty)$ $(j = 1, 2, 3)$ definidas por,
$$\begin{aligned} q_1(x, y) &= \max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, \cdots, n\} \\ q_2(x, y) &= \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) \\ q_3(x, y) &= (\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

são métricas para $\Pi_{i=1}^{n} X_i$. Provar que

$$q_1(x,y) \leq q_3(x,y) \leq q_2(x,y) \leq nq_1(x,y).$$

10. Sejam $\{(X_i d_i) : i \in \mathbf{N}\}$ uma sequência de espaços métricos. Prove que $d : \Pi_{i=1}^{\infty} X_i \times \Pi_{i=1}^{\infty} X_i \to [0,\infty)$ definida por,

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$

é uma métrica.

11. Seja $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to [0,\infty)$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{se } x \text{ e } y \text{ são LD,} \\ \|x\| + \|y\| & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{1}$$

Provar que $(\mathbf{R}, d)$ é um espaço métrico.

12. Seja $p \in [1,\infty)$ e $L_R^p([a,b])$ o conjunto de todas as funções $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ integráveis segundo Riemann tais que existe

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty.$$

Provar que

$$d_p(f,g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

define uma métrica em $L_R^p([a,b])$.

13. Em aula mostramos a desigualdade de Hölder no espaço de dimensão finita $\mathbb{R}^n$. Mostre que ela também vale nos espaços l_p, i.e. se $(x_n) \in l_p$ e $(y_n) \in l_q$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|(x_n)\|_p \, \|(y_n)\|_q.$$

14. Mostre que a desigualdade de Minkowski falha se $p < 1$.

15. Moste que todo espaço métrico é reunião enumerável de subconjuntos limitados.

16. Dê exmplos de dois subconjuntos discretos $X, Y \subset \mathbb{R}$ tais que $X \cup Y$ não é discreto.

17. Seja X um conjunto infinito enumerável. Mostre que se pode definir em X uma métrica em X, relativa à qual nenhum ponto de X é isolado. Idem, com todos os pontos de X isolados, i.e. X é discreto.

18. Estabeleça uma isometria entre os espaços $C([0,1];\mathbb{R})$ e $C([0,1];\mathbb{R})$ (ambas com a métrica do supremo). Idem entre $C([0,1];\mathbb{R})$ e $C([a,b];\mathbb{R})$.Existe isometria entre $C([0,1];\mathbb{R})$ e $C_b((0,1);\mathbb{R})$? (Sugestão: qual a imagem pela isometria de $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$?)