

1a. Lista de Exercícios

MA-604 Topologia dos Espaços Métricos

Os exercícios de 1 a 5 foram tirados do nosso texto principal (E. L. Lima "Espaços Métricos") e os exercícios de 6 a 12 foram tirados do livro do Kaplansky ("Set Theory and Metric Spaces"). Para conveniência dos alunos, nesta primeira lista estou reproduzindo os enunciados ao invés de simplesmente indicar os números dos exercícios nos livros. Na verdade TODOS os exercícios desses livros me parecem muito bons, a ponto de dificultar a escolha dos "mais importantes". Recomendaria que os alunos, além de resolver as questões desta primeira lista, lessem todos os outros exercícios referentes a esse assunto nesses livros.

1. Seja $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que: 1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$. O que falta para que d seja métrica? Mostre que de fato, essas condições implicam que d é uma métrica.
2. Para cada uma das condições que caracterizam uma métrica, obtenha uma função $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que não a cumpre, mas satisfaz as outras três.
3. Todo espaço métrico finito é discreto.
4. Seja X um conjunto infinito enumerável. Mostre que se pode definir uma métrica em X , relativamente à qual nenhum ponto de X é isolado.
5. Dê exemplo de dois conjuntos discretos $X, Y \subset \mathbb{R}$ tais que $X \cup Y$ não seja discreto.
6. Mostre que em um espaço métrico $d(a_1, a_n) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + \dots + d(a_{n-1}, a_n)$.
7. Seja $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real. Dizemos que f é *côncava* se para todo $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e todo $\lambda \in [0, 1]$ tivermos:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Dado um espaço métrico (M, d) , mostre que $f \circ d$ também é uma métrica se f for côncava, $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ e crescente.

8. Se f (como no exercício anterior), for duas vezes derivável, mostre que se $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ então f é côncava.
9. Usando os dois exercícios anteriores, se d for métrica, mostre que $f \circ d$ também é métrica com: a) $f(x) = \sqrt{x}$; b) $f(x) = x/(1+x)$; e c) $f(x) = \min\{x, 1\}$ (Compare com o exercício 4, §1, do livro do Elon). Mostre que $d(x, y)^2$ não é métrica (compare com o exercício 2, §1 do Elon).
10. Dadas duas métricas d_1 e d_2 em um conjunto M , verifique (justifique) quais das seguintes também são métricas: a) $d_1 + d_2$; b) $\max\{d_1, d_2\}$; c) $\min\{d_1, d_2\}$.
11. Considere o espaço métrico formado pela reta real. Fixado um ponto x_0 , mostre que existem exatamente duas isometrias que deixam x_0 fixo. Como ficaria se tivéssemos $x_0 \in \mathbb{R}^2$?
12. Dê um exemplo de uma isometria de um espaço métrico com um subconjunto próprio (sugestão: use a métrica trivial 0-1!)