MT401 - Lista 05

Prof. Christian Rodrigues

Entrega: 26 de junho de 2025

1. Mostre que, se T for uma contração, então T^n, para $n \in \mathbb{N}$ será uma contração. Mas se T^n for uma contração para algum $n > 1$, então não necessariamente T será contração.

2. Dado um espaço métrico completo X e $g : X \to X$, mostre que se g for continuamente diferenciável e $|g'(x)| \leq k < 1$, onde k é a constante de Lipschitz, então $x_n = g(x_{n-1})$ converge.

3. Encontre todas condições iniciais tais que o problema do valor inicial $tx' = 2x, x(t_0) = x_0$

   a) não tem solução;

   b) mais de uma solução;

   c) solução única.

4. Mostre que todo espaço normado que é isomorfo a um espaço reflexivo é também reflexivo.

5. Obtenha a Desigualdade de Schwarz da Desigualdade de Bessel.

6. Mostre que se $x \perp y$ em um espaço com produto interno, então
$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

7. Seja (e_k) uma sequência ortonormal em um espaço com produto interno X. Mostre que para quaisquer $x, y \in X$,
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle| \leq ||x|| ||y||.$$

8. Mostre que, em um espaço de Hilbert H, convergência de $\sum ||x_j||$ implica convergência de $\sum x_j$.

9. Mostre que a equação diferencial de Legendre pode ser escrita como
$$[(1 - t^2)P_n']' = -n(n + 1)P_n. \tag{1}$$
Multiplicando a equação (1) por P_m. Em seguida, multiplique a correspondente equação obtida para P_m por $-P_n$ e some as duas equações. Integrando o resultado de -1 a 1, mostre que (P_n) é uma sequência ortogonal em $L^2[-1, 1]$.

10. Mostre que o espaço dual do espaço das sequências reais ℓ^2 é o próprio ℓ^2.

11. Mostre que todo espaço de Hilbert H é isomorfo ao seu bidual $H'' = (H')'$.

12. Verifique que o conjunto funções reais

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \quad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}(nt), \quad n \in \mathbb{N},$$

é um sistema ortonormal em $L^2[0, 2\pi]$.