IMECC/Unicamp
MA311 - Cálculo III
Prof. Ricardo Miranda Martins
Prova 1 - 19 de abril de 2024 - Gabarito

Q1. Mostre que a equação dada abaixo é exata e encontre sua solução geral.

$$\left(x^2+y^2\right)dx+\left(2xy-e^{2y}\right)dy=0.$$

Solução:

Neste caso,

$$M=x^2+y^2 \text{ e } N=2xy-e^{2y} \quad\Rightarrow\quad M_y=2y \text{ e } N_x=2y.$$

Como $M_y=N_x$, a equação dada é exata. 0,5 ptos

Logo, existe uma função $\Psi(x,y)$ tal que

$$\Psi_x=M=x^2+y^2 \text{ e } \Psi_y=N=2xy-e^{2y}.$$

0,5 ptos

Então,

$$\Psi(x,y)=\int M(x,y)dx=\int\left(x^2+y^2\right)dx=\frac{x^3}{3}+xy^2+g(y).$$

0,5 ptos

Derivando $\Psi(x,y)$ em relação a y e igualando a $N(x,y)$, temos

$$2xy-e^{2y}=N(x,y)=\Psi_y(x,y)=2xy+g'(y)$$

$$g'(y)=-e^{2y} \;\Rightarrow\; g(y)=-\frac{1}{2}e^{2y}.$$

Logo,

$$\Psi(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy^2-\frac{1}{2}e^{2y}.$$

0,5 ptos

De onde a solução da equação dada é dada implicitamente por

$$\frac{x^3}{3}+xy^2-\frac{1}{2}e^{2y}=C.$$

0,5 ptos

Q2. Encontre a solução geral da equação linear homogênea abaixo:

$$y^{(7)} - 2y^{(6)} + 3y^{(5)} - 4y^{(4)} + 3y^{(3)} - 2y'' + y' = 0,$$

sabendo que

$$r^7 - 2r^6 + 3r^5 - 4r^4 + 3r^3 - 2r^2 + r = r(r-1)^2(r^2+1)^2.$$

Solução: Como a equação característica associada a equação dada é

$$r^7 - 2r^6 + 3r^5 - 4r^4 + 3r^3 - 2r^2 + r = 0,$$

então $r(r-1)^2(r^2+1)^2 = r^7 - 2r^6 + 3r^5 - 4r^4 + 3r^3 - 2r^2 + r = 0$, temos que as raízes da equação característica são:

$$\begin{cases} r_1 = 0, \\ r_2 = r_3 = 1, \\ r_4 = r_5 = i, \\ r_6 = r_7 = -i. \end{cases}$$

1,0 pto

De onde temos as sete soluções linearmente independentes da E.D.O.

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^t,\ y_3 = te^t,\ y_4 = \cos t,\ y_5 = \text{sen } t,\ y_6 = t\cos t,\ y_7 = t \text{ sen } t.$$

1,0 pto

Logo, a solução geral da equação dada é

$$y = c_1 + c_2 e^t + c_3 te^t + c_4 \cos t + c_5 \text{sen } t + c_6 t\cos t + c_7 t \text{ sen } t.$$

0,5 pto

Q3. Considere a E.D.O.

$$y'' - 6y' + 10y = 2x^2 + 3 + e^{3x} + 2e^{3x}\cos x.$$

(a) Determine a solução da equação homogênea associada.

(b) Usando o método de coeficientes indeterminados apresente e justifique a forma da solução particular. **Não calcule os coeficientes!**

Solução:

(a) Como a equação característica da equação homogênea associada é dada por

$$r^2 - 6r + 10 = 0.$$

segue que

$$\boxed{r = 3 + \mathrm{i} \text{ ou } r = 3 - \mathrm{i}.}$$

0,5 ptos

Assim, temos as seguintes soluções:

- associada a raiz $r = 3 + \mathrm{i}$, temos as soluções $e^{3x}\cos x$ e $e^{3x}\,\mathrm{sen}\,x$.

Portanto, a solução geral da equação homogênea associada é dada por

$$\boxed{y_h(x) = c_1 e^{3x}\cos x + c_2 e^{3x}\,\mathrm{sen}\,x}$$

0,5 ptos

(b) Portanto uma solução particular é dada por

$$\boxed{y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^{3x} + xe^{3x}(E\cos x + F\,\mathrm{sen}\,x).}$$

Note que

- $y'' - 6y' + 10 = 2x^2 + 3$ admite uma solução da forma $Ax^2 + Bx + C$. 0,5 ptos
- $y'' - 6y' + 10 = e^{3x}$ admite uma solução da forma De^{3x}. 0,5 ptos
- $y'' - 6y' + 10 = 2e^{3x}\cos x$ admite uma solução da forma $xe^{3x}(E\cos x + F\,\mathrm{sen}\,x)$ (observe que $e^{3x}(E\cos x + F\,\mathrm{sen}\,x)$ possui parcelas que são soluções da equação homogênea associada). 0,5 ptos

Q4. Utilize a transformada de Laplace para encontrar a solução do PVI abaixo.

$$\begin{cases} y'' + y = u_1(t)(t-1) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace em ambos os lados da E.D.O., temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_1(t)(t-1)\}.$$

Denotando por $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ e usando que $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$, temos

$$s^2Y(s) - s + Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

$$(s^2+1)Y(s) = s + \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+1)} + \frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}.$$

0,5 ptos

Aplicando a transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\right\} = \cos t.$$

0,5 ptos

Agora observemos que

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{As^3 + As + Bs^2 + B + Cs^3 + Ds^2}{s^2(s^2+1)}$$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + D = 0, \\ A = 0, \\ B = 1, \end{cases}$$

cuja solução é $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ e $D = -1$. Portanto,

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}.$$

0,5 ptos

Retomando o cálculo da transformada, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right\} = u_1(t)(t-1) - u_1(t)\ \text{sen}\ (t-1).$$

0,5 ptos

Logo,

$$y(t) = \cos t + u_1(t)(t-1) - u_1(t)\ \text{sen}\ (t-1).$$

0,5 ptos