Notas de aula de Cálculo I

Ricardo M. Martins
IMECC/Unicamp
RMiranda@unicamp.br

Resumo

Estas notas de aula são voltadas para o curso de Cálculo I da Unicamp. Elas não substituem um bom livro de Cálculo (veja algumas sugestões na lista de referências bibliográficas). Este texto está em constante modificação, não imprima-o. Se encontrar algum erro, por favor me mande um e-mail.

Conteúdo

1 Introdução **5**
1.1 O que esse material cobre? 5
1.2 Copyright 5
1.3 Colabore! 6
1.4 Comentários sobre a bibliografia 6

2 O que é cálculo? **8**
2.1 Motivação para estudo do cálculo 8
2.2 Retas tangentes 9
2.3 Áreas 11
2.4 Como sua calculadora funciona? 14

3 Revisão de pré-cálculo: alguns exercícios para esquentar as turbinas **17**
3.1 Teste diagnóstico/revisão 17

4 Algumas notações **23**
4.1 Conjuntos numéricos 23

5 Exemplos importantes de funções **25**
5.1 Funções 25
5.2 Exercícios 29

6 Operando com funções, e exemplos mais complexos **30**
6.1 Operações com funções . . . 30
6.2 Invertendo funções . . . 31
6.3 Funções injetoras e sobrejetoras . . . 32

7 Limites de funções reais **34**
7.1 Limites . . . 34
7.2 Retas tangentes . . . 35
7.3 Limites laterais . . . 35
7.4 Definição formal de limite . . . 38
7.5 Propriedades . . . 39

8 Limites infinitos e limites no infinito **42**
8.1 Vamos falar sobre o infinito. . . . 42
8.2 Assíntotas . . . 44

9 Assíntotas **47**
9.1 Assíntotas . . . 47

10 Teorema do Sanduíche e Teoremas de Bolzano, Cauchy e Weierstrass **50**
10.1 Teorema do Sanduíche . . . 50
10.2 Teoremas de Bolzano, Cauchy e Weierstrass . . . 53
10.3 Bônus: definição de limite para funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ . . . 55

11 Limites fundamentais **60**
11.1 Limites fundamentais . . . 60

12 Exercícios: parte I **65**

13 Variações, aproximações lineares e derivadas **70**
13.1 *Our friendly neighborhood*, a regra de três . . . 70
13.2 Derivadas . . . 72
13.3 A derivada como uma função . . . 73

14 Derivadas de produtos, quocientes e derivadas de ordem superior **76**
14.1 Derivadas de algumas funções "importantes" . . . 76
14.2 Regra do produto e do quociente . . . 77
14.3 Derivadas de ordem superior . . . 79

15 A regra da cadeia e taxas relacionadas **81**
15.1 Regra da cadeia . . . 81
15.2 Taxas Relacionadas . . . 82

16 Derivação implícita **84**
16.1 Derivação implícita . . . 84

17 Polinômios de Taylor e o Teorema do Valor Médio **88**
17.1 Aproximações lineares e diferenciais 88
17.2 O Teorema do Valor Médio 90
17.3 Uma feliz coincidência? 91

18 Pontos críticos, crescimento e decrescimento **93**
18.1 Crescimento e decrescimento de funções 93
18.2 A relação da derivada segunda com gráficos 95

19 Esboços de gráficos e problemas de otimização **97**
19.1 Esboço de gráficos 97
19.2 Problemas de otimização 97

20 Teoremas de L'Hospital e mais algumas aplicações **100**
20.1 Teoremas de l'Hospital 100
20.2 Mais algumas aplicações 104

21 Exercícios: parte II **106**

22 Integrais de Riemann e Primitivas **108**
22.1 A integral de Riemann 108
22.2 Primitivas 111
22.3 Calculando integrais definidas 112

23 Funções definidas por integrais, áreas e integração por substituição **113**
23.1 Funções definidas por integrais 113
23.2 Integração por substituição 114
23.3 Áreas 114

24 O Teorema Fundamental do Cálculo **116**
24.1 Primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo 116
24.2 Integração por substituição 117

25 Integração por partes **119**
25.1 Integração por partes 119

26 Integrais trigonométricas **121**
26.1 Integrais trigonométricas 121
26.2 Integrais trigonométricas: potências 122

27 Substituições trigonométricas **125**
27.1 Substituições trigonométricas 125
27.2 Substituições trigonométricas 126

28 Frações parciais e integrais impróprias **130**
28.1 Frações parciais 130
28.2 Um caso mais complicado 133
28.3 Integrais impróprias 134

29 Volumes, comprimento de arco e o Teorema do Valor Médio para integrais **139**
29.1 Volumes 139
29.2 Comprimento de arco 141
29.3 Teorema do Valor Médio para Integrais 144
29.4 Uma integral não muito simples 145

30 Exercícios: parte III **150**

1 Introdução

Bem-vindo a esta proposta para um primeiro curso de cálculo! Este material foi elaborado a partir de notas de aula de algumas vezes que lecionei o curso de cálculo na Unicamp, em especial após ter criado slides para as aulas online 2020-2021, que depois foram transformados em notas de aula em 2023, e serão atualizados sempre que eu lecionar novamente o curso, ou quando descobrir um exemplo legal por aí.

Importante ressaltar que o objetivo não é que estas notas substituam o livro-texto. A organização dos capítulos é em termos da quantidade de conteúdo que em geral é dado em uma aula de 2h. O texto tem alguns exemplos resolvidos e vários exercícios deixados para o leitor.

O texto tem muitas lacunas, pois a ideia é justamente ser um texto que acompanha uma aula. Porém, os exemplos resolvidos e alguns comentários podem ser úteis para quem estiver fazendo o curso, e só por isso estou disponibilizando o texto.

O curso de cálculo da Unicamp se divide em três partes[1]: limites e continuidade (capítulos 1-10), derivadas (capítulos 12-19) e integrais (capítulos 21-28). Ao final de cada uma destas "partes", deixo um capítulo com exercícios, a maioria deles retirados de provas antigas aplicadas para alunos dos cursos de cálculo.

1.1 O que esse material cobre?

Estas notas cobrem a ementa atual do curso de Cálculo I ministrado pelo IMECC, complementado por alguns conteúdos que são importantes para alunos do Cursão e algumas engenharias. A sequência é mais ou menos essa:

1. Números, Desigualdades, Valores Absolutos. Gráfico de equações de segundo grau, Trigonometria. Funções. Funções exponenciais. Funções inversas e logaritmos.

2. Os problemas da tangente e da velocidade. O limite de uma função. Definição precisa de limite. Cálculo dos limites usando suas leis. Continuidade. Teorema do Valor Intermediário. Limites no infinito e assíntotas horizontais.

3. Derivadas e taxas de variação. A derivada como uma função. Derivadas de funções polinomiais e exponenciais. Regras do produto e quociente. Derivadas de funções trigonométricas. Regra da cadeia. Diferenciação implícita. Derivadas de funções logarítmicas. Taxas Relacionadas. Aproximações lineares e Diferenciais. Polinômios de Taylor. Valores máximo e mínimo. Teorema do Valor Médio. Formas indeterminadas e a regra de L'Hôpital. Como derivadas afetam gráficos. Esboço de curvas. Problemas de otimização.

4. Primitivas. Áreas e distâncias. A integral definida. O teorema fundamental do cálculo. Integrais indefinidas. A regra de substituição. Área entre curvas. Integração por partes. Integrais trigonométricas. Substituição trigonométrica. Integração de funções racionais por frações parciais. Estratégias de integração. Integrais impróprias. Volumes.

1.2 Copyright

Estas notas de aula estão regidas pela Licença Pública Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional:

[1] Ou quatro, se você considerar a parte inicial de "pré-cálculo".

https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode.pt

Veja um resumo clicando aqui:

https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pt_BR

1.3 Colabore!

Achou algum erro neste material? Tem um exemplo/exercício legal que acha que deveria estar aqui? Me mande um e-mail: RMiranda@unicamp.br.

1.4 Comentários sobre a bibliografia

O objetivo deste texto não é substituir algum livro-texto, mas ele é um bom ponto de partida. Nos livros, você encontrará mais detalhes sobre os tópicos apresentados. Existem excelentes livros de Cálculo, e na minha opinião qualquer um deles serve para um primeiro curso. Eu gosto bastante de três coleções de livros: os livros de cálculo do prof. Guidorizzi [1, 2], o livro do Stewart [3], e o livro do Simmons [4].

Quando eu fiz o curso de cálculo, muitos anos trás, utilizei os livros do Guidorizzi, do prof. Paulo Boulos [5, 6], além do Swokowski [7] e do Leithold [8]. Existem livros mais formais/avançados, como o livro do Spivak [9], Apostol [10], Piskunov [11, 12] e o do Courant [13] (são livros com ótimos exercícios!), e recomendo para uma leitura mais aprofundada.

Os livros [14] e [15], de análise matemática, são ótimas referências que contém algumas demonstrações omitidas tanto aqui neste texto como livros de cálculo em geral.

Por fim, recomendo o livro [16], que apesar de muito interessante, é muito básico para este curso.

Referências bibliográficas

[1] H.L. Guidorizzi. Um curso de cálculo, volume 1. LTC, 6 edition, 2018.

[2] H.L. Guidorizzi. Um curso de cálculo, volume 2. LTC, 6 edition, 2018.

[3] J. Stewart. Cálculo, volume 1. Cengage Learning, 9 edition, 2022.

[4] G. F. Simmons. Cálculo com geometria analítica, volume 1. Pearson Universidades, 1 edition, 1996.

[5] P. Boulos. Introdução ao Cálculo, volume 1. Blucher, 2 edition, 1983.

[6] P. Boulos. Introdução ao Cálculo, volume 2. Blucher, 2 edition, 1983.

[7] E. W. Swokowski. Cálculo com geometria analítica, volume 1. Makron Books do Brasil, 2 edition, 1994.

[8] Louis Leithold. O cálculo com geometria analítica, volume 1. Editora Habra, 3 edition, 1994.

[9] Michael Spivak. Calculus. Publish or Perish, fourth edition, 2008.

[10] T. Apostol. Calculus: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra, volume 1. Wiley, 2 edition, 1967.

[11] N. Piskunov. Cálculo diferencial e integral, volume 1. Edições Lopes da Silva, 12 edition, 1988.

[12] N. Piskunov. Cálculo diferencial e integral, volume 2. Edições Lopes da Silva, 12 edition, 1988.

[13] R. Courant. Differential and Integral Calculus, volume 1. Blackie & Son Limited, 2 edition, 1937.

[14] Elon Lages Lima. Curso de Análise. IMPA, 15 edition, 2019.

[15] Djairo Guedes de Figueiredo. Análise I. LTC, 2 edition, 1996.

[16] O. M. Inouye. Introductory calculus for infants. Omionline.CA, 2011.

2 O que é cálculo?

2.1 Motivação para estudo do cálculo

Se você ainda não está convencido de que deveria aprender cálculo, o próximo argumento vai te convencer: matemática não é sobre números, é sobre linguagem.

Considere o seguinte trecho de um poema:

Juuri nyt, jos vähitellen lakkaat rakastamasta minua
Minun on lakattava rakastamasta sinua vähitellen
Jos unohdat minut yhtäkkiä
Älä katso minua
Koska olen varmasti unohtanut sinut

Entendeu alguma coisa? Se você não sabe ler em finlandês, então provavelmente não tenha entendido. Vamos reescrever este trecho, agora em português:

Bem agora, se pouco a pouco você deixar de me amar
Eu devo parar de te amar pouco a pouco
Se de repente você me esquecer
Não olhe para mim
Pois eu já devo ter esquecido você.

Este é um trecho de "Se você me esquecer", de Pablo Neruda. Bonito, né? A versão anterior já era bonita, pois é o mesmo trecho, mas não conseguíamos perceber tal beleza. O mesmo acontece com a ciência moderna e o cálculo. Em termos de ciência e tecnologia, temos o seguinte:

"*Without calculus, we wouldn't have cell phones, computers, or microwave ovens. We wouldn't have radio. Or television. Or ultrasound for expectant mothers, or GPS for lost travelers.*"
– Infinite Powers, Steven Strogatz

Você deve se conscientizar de que Cálculo (matemática, em geral) é uma linguagem. Para entender um poema, você precisa saber português (ou outro idioma). Para entender certos fenômenos da natureza você precisa aprender cálculo. Aos poucos, espero que você descubra outros bons motivos para você continuar estudando cálculo.

A grande vantagem do Cálculo? Todos podem aprender!

"In modern science and engineering, college mathematics has become this "basic language", beginning with precalculus, moving into calculus and progressing into more advanced courses. The difficulty is that college mathematics will involve genuinely new ideas and the mystery of this unknown can be sort of intimidating. However, everyone in this course has the intelligence to succeed!"
– Collingwood, Prince, Conroy (University of Washington), *Precalculus*.

Ao final do primeiro curso de cálculo, você terá aprendido que

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

seja lá o que significarem estes símbolos.

Levaremos quase 4 meses para aprender a resolver esta integral, mas não se preocupe - o pleno desenvolvimento do Cálculo levou séculos!

Um detalhe com o qual você deve ter alguma preocupação é o formalismo matemático. Como toda linguagem, a gramática e a pontuação pode alterar totalmente o sentido de um texto. Também é assim com os símbolos matemáticos:

1. Você precisa aprender a usar símbolos matemáticos: $\forall$, $\exists$, $\in$, $\subset$, $\subseteq$, $\sum$, $\prod$, ...
2. Os símbolos $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ não são só setinhas!
3. Equações sempre tem o sinal de igualdade "=".
4. $=$, $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são coisas diferentes!

Faça uma pausa para refletir sobre as seguintes questões:

1. O que é um número racional? O que é um número não-racional?
2. Qual conjunto é "maior": $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$?
3. O que é π? Quantas casas decimais de π você sabe?

Procure as respostas em livros ou na internet! Você aprenderá muita coisa sobre matemática fazendo isso.

Vamos agora começar a falar de três problemas fundamentais, cujos métodos do cálculo diferencial e integral foram fundamentais para resolver:

- Retas tangentes
- Cálculo de áreas
- Como sua calculadora funciona?

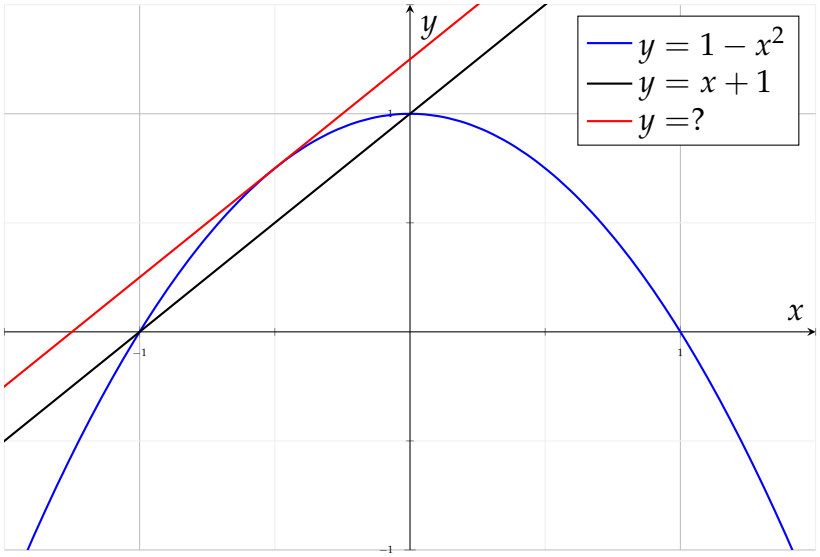
2.2 Retas tangentes

Considere os gráficos das funções $y = f(x) = 1 - x^2$ e $y = x + 1$.

O gráfico da segunda função é uma reta que corta o gráfico de $y = f(x)$ em dois pontos: $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. Agora vamos começar a "arrastar" a reta "para cima", sempre de forma de que a nova reta seja paralela à inicial, ou seja, sem alteração no coeficiente angular.

Aos poucos, os pontos de interseção começarão a ficar cada vez mais próximos, até que ambos se tornem um só: o ponto $(-1/2, 1/4)$. Neste momento, a reta (em vermelho, na figura abaixo) será **tangente** ao gráfico de $y = f(x)$. Se convença disto fazendo várias figuras!

Qual é a equação da "última reta" deste processo, ou seja, da reta tangente?



Uma forma de resolver este problema, com os dados apresentados, é o seguinte: as retas paralelas à reta $y = x + 1$ são da forma $y = x + a$, com $a \in \mathbb{R}$. A reta $y = x + a$ encontrar o gráfico de $y = 1 - x^2$ em um único ponto significa que a equação

$$1 - x^2 = x + a$$

tem solução única, que por sua vez é equivalente ao discriminante da equação

$$x^2 + x + a - 1 = 0$$

ser igual a zero. O discriminante é

$$\Delta = 1^2 - 4(a - 1) = 1 - 4a + 4 = 5 - 4a.$$

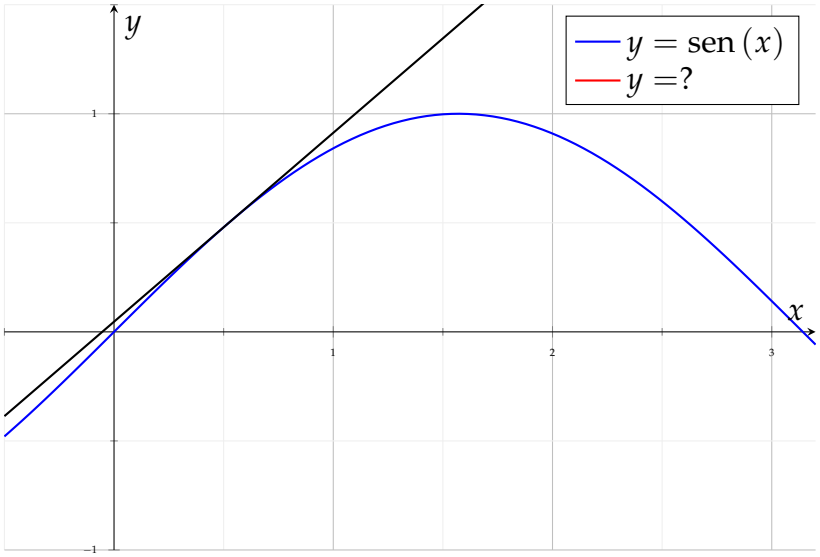
Portanto, se $a = 5/4$, então a reta obtida é $y = x + a$, que vai encontrar o gráfico de $y = x + 1$ num único ponto.

Que ponto é este? Para descobrir, resolvemos

$$1 - x^2 = x + 5/4,$$

o que nos dá $x = 1/2$ e daí obtemos o ponto de interseção: $(1/2, 3/4)$.

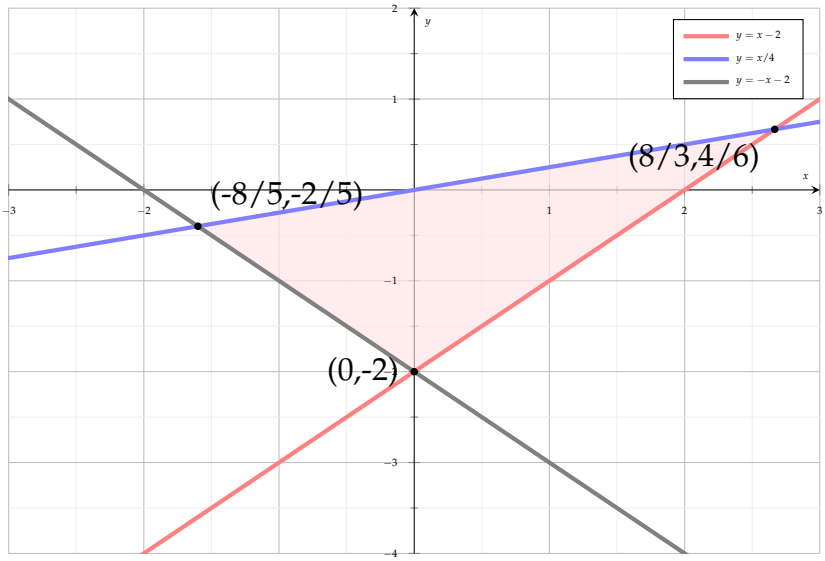
No fim, descobrimos a reta vermelha (dada pela equação $y = x + 5/4$) e o ponto de interseção. Isto foi possível basicamente por dois motivos: por entendermos bem como as retas secantes se transformam em retas tangentes, e principalmente por conseguirmos resolver facilmente as equações envolvidas, graças à fórmula de Bháskara. Se a função inicial não for quadrática ou outra bem simples, nosso método explícito não funcionaria. Por exemplo, tente repetir o argumento no caso abaixo, procurando a equação da reta tangente ao gráfico de $y = \operatorname{sen}(x)$ em $x = \pi/6$?



Veremos que com os métodos do cálculo diferencial, o problema de encontrar esta reta será reduzido ao problema de calcular um "limite", e será razoavelmente simples.

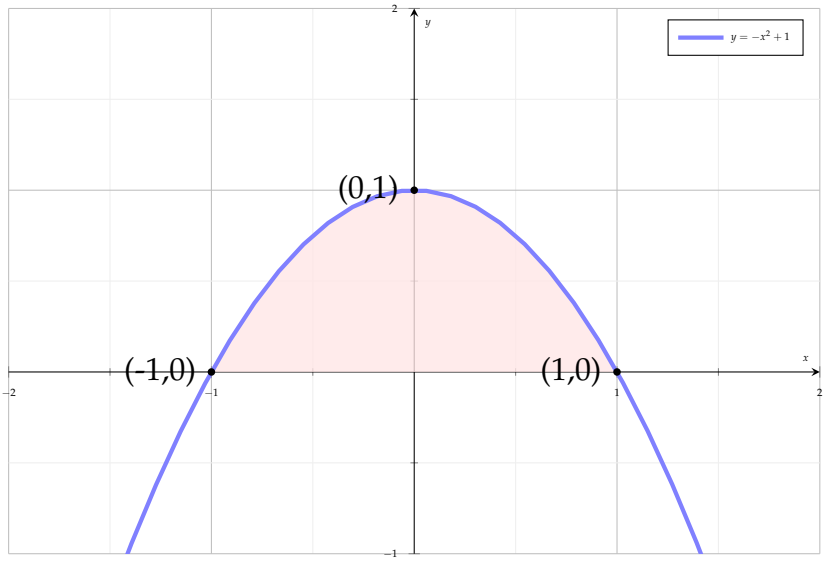
2.3 Áreas

Considere o seguinte problema: na figura abaixo, qual a medida da área sombreada?



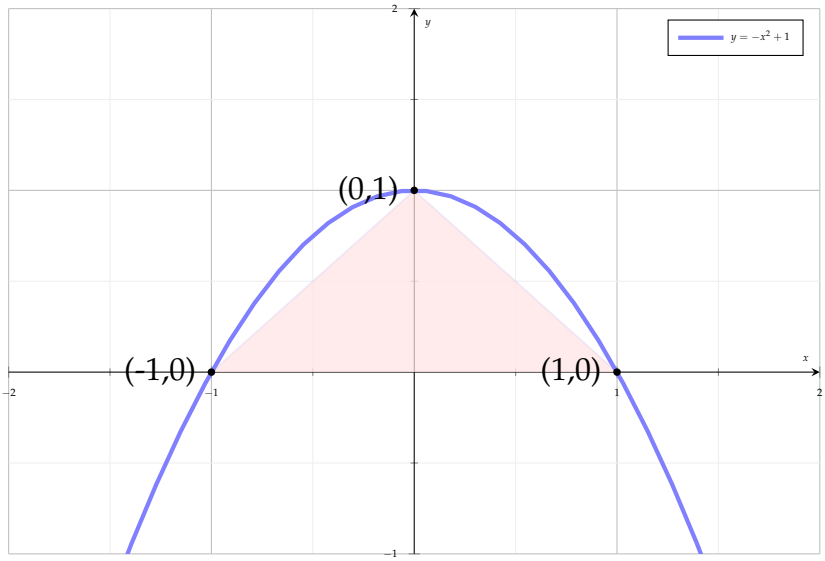
Não é um problema muito difícil de resolver. Afinal, a figura é um triângulo e uma forma fácil é decompô-lo em dois triângulos (por exemplo, "cortando" pelo eixo y), calcular a área de cada um deles e fazer a soma.

E sobre a área sombreada da figura abaixo, o que se pode dizer?



Não é tão fácil calcular, né? Podemos fazer algumas afirmações: a área é menor do que 2, pois a área sombreada está dentro do retângulo $[-2, 2] \times [0, 1]$.

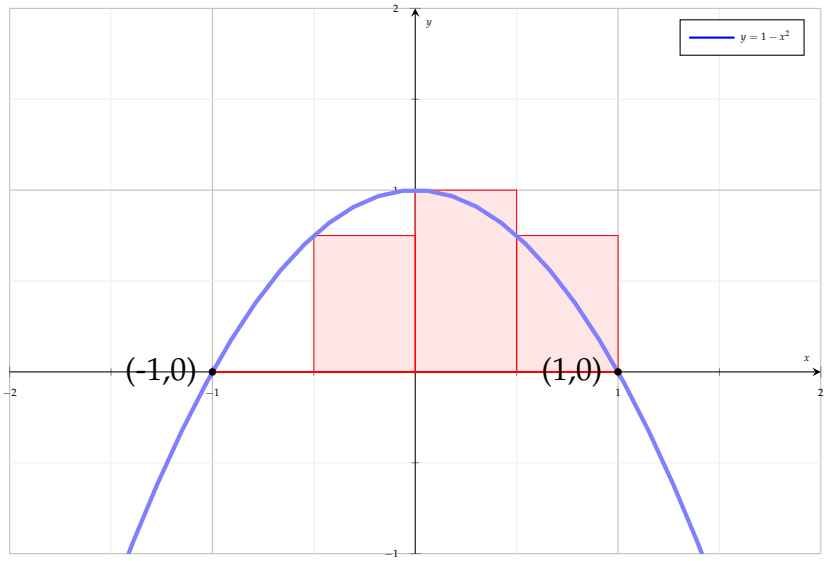
A área sombreada não é um triângulo, sua fronteira é uma parábola, mas podemos aproximá-la por um triângulo:



$$A \approx 1$$

Desta forma, como a área do triângulo sombreado é 1, temos que a área original é "aproximadamente" 1. Este método de aproximar a área desconhecida por áreas conhecidas é promissor. Existe uma forma sistemática e "tradicional" para fazermos isso: usando retângulos.

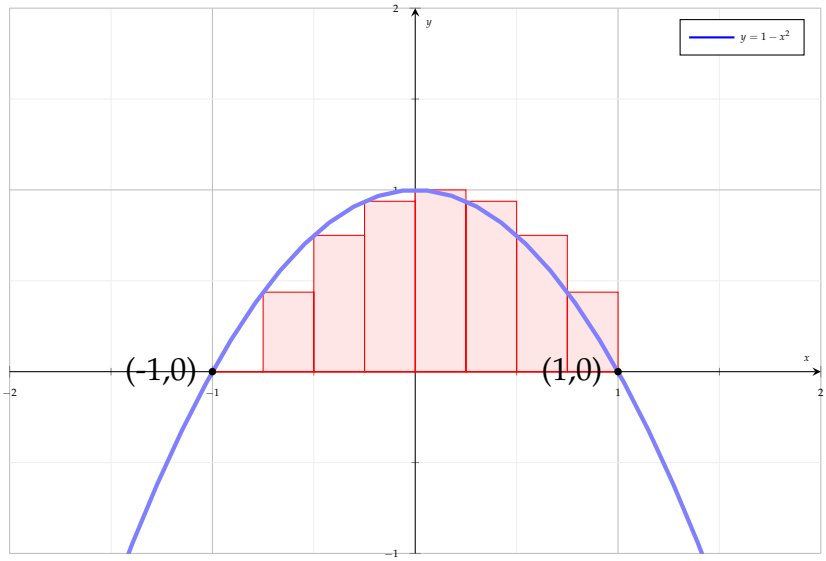
Vejamos como fazer isso. Primeiro vamos dividir o intervalo $[-1, 1]$ em quatro subintervalos de mesmo comprimento, e considerar sempre o retângulo cuja altura é o valor da função calculado no extremo esquerdo do subintervalo. Fazendo isso, teremos quatro retângulos (um deles é degenerado, terá altura 0, neste caso específico), como na figura a seguir. Daí, aproximamos a área entre o gráfico da função e o eixo x como sendo a área de todos os retângulos.



Obtemos então uma primeira aproximação para a área:

$$4 \text{ retângulos } / \ A \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8} \approx 1,125.$$

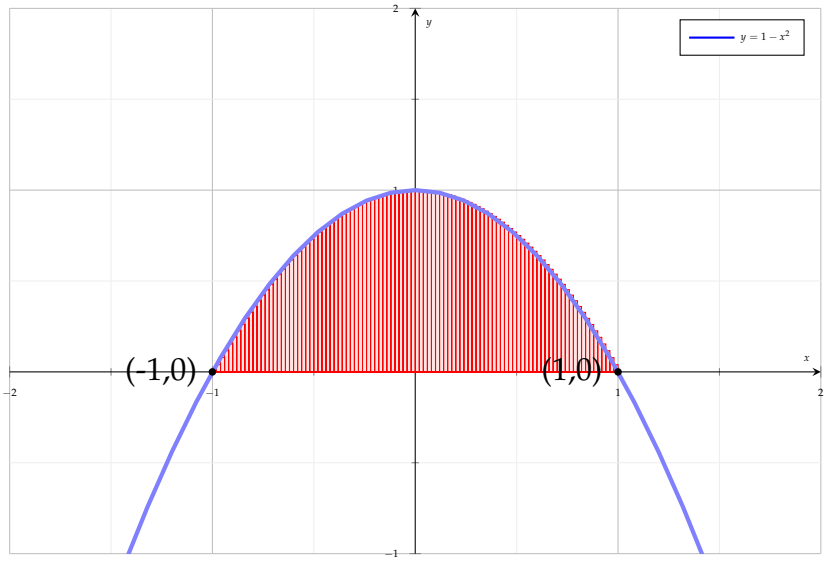
Vamos ver o que acontece quando dividimos $[-1,1]$ em 8 subintervalos:



Agora a área fica

$$8 \text{ retângulos } / \ A \approx \frac{21}{16} = 1,3125.$$

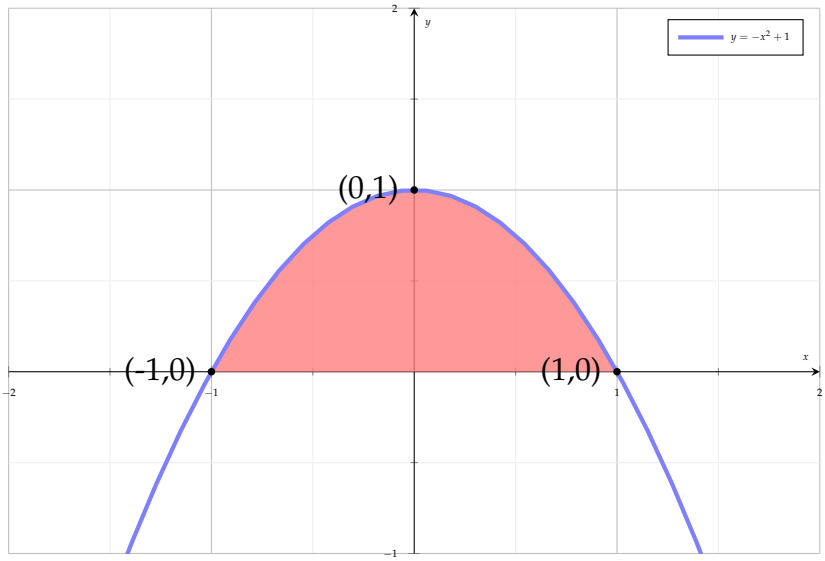
Passando para 100 retângulos:



Com 100 retângulos, obtemos a aproximação para a área:

$$A \approx 1,3332.$$

Agora fazendo um número "enorme" de retângulos:



Obteremos que a área é $A = 4/3$ (ou um número muito perto disso). Ao longo do curso, veremos como formalizar este processo.

2.4 Como sua calculadora funciona?

Considere a função

$$f(x) = \cos(x),\ x \in [0, 2\pi].$$

Sabemos alguns valores dessa função:

- $f(0) = 1$,
- $f(\pi/3) = 1/2$,
- $f(\pi/4) = \sqrt{2}/2$,
- $f(\pi/6) = \sqrt{3}/2$,
- $f(\pi/2) = 0$,
- $f(\pi) = -1$,

e talvez você tenha decorado esse valores usando uma musiquinha.

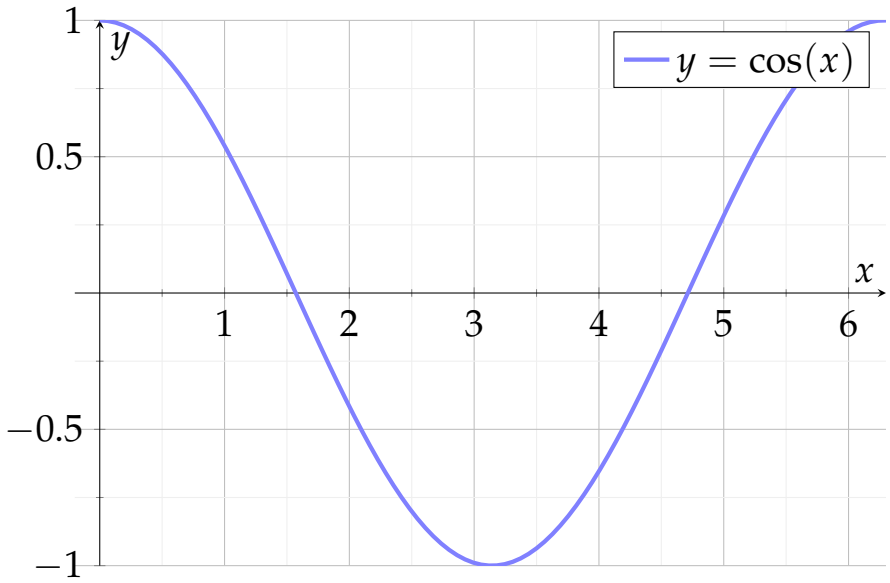
Algo importante a se observar é o seguinte: π é um número real irracional, com aproximação decimal

$$\pi \approx 3,141592653589793238...$$

Assim, quando calculamos $\cos(\pi)$, estamos calculando a função $\cos(x)$ no número real π, ou seja, estamos calculando aproximadamente

$$\cos(3,141592653589793238...).$$

O gráfico da função $y = \cos(x)$, com $x \in [0, 2\pi]$, é o seguinte:



Pergunta: Quanto vale $\cos(1)$? Pelo gráfico, vemos que $\cos(1) \approx 0,5$. O problema é que a função $\cos(x)$ é uma caixa preta, não sabemos como calcular $\cos(x)$ somente com base na expressão da função.

O que podemos fazer é aproximar a função $\cos(x)$ por uma outra função que sabemos calcular. Considere

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^{12}}{479001600}.$$

Temos que

$$g(1) = \frac{258805669}{479001600} = 0,5403023059.$$

Afirmamos, sem demonstrar, que a função $g(x)$ é uma boa aproximação para $\cos(x)$. Com isso, obtemos que

$$cos(1) \approx 0,5403023059.$$

Vamos aprender a construir estes polinômios (chamados polinômios de Taylor) para funções "boas". É assim que sua calculadora faz quando você aperta o botão "cos": ela calcula os valores num polinômio de Taylor, já que para calcular o valor de um polinômio num ponto, só são necessárias operações elementares.

Observação 2.1. É preciso ter clareza que aqueles senos e cossenos que a gente calcula no colégio são exatamente estas funções seno e cosseno. São a mesma coisa. O fato de no colégio calcularmos em termos de ângulos (45°, 60°, etc) e agora estarmos calculando tudo em termos de números reais não deve te confundir!

3 Revisão de pré-cálculo: alguns exercícios para esquentar as turbinas

3.1 Teste diagnóstico/revisão

Mais do que explicar novamente o conteúdo, vamos partir logo para a prática. Assim, estas notas de "pré-cálculo" começam com uma revisão motivada por exercícios.

Acredito que as soluções detalhadas dos problemas abaixo são, por si só, uma boa revisão de conteúdo.

Exercício 3.1. *Qual é o valor de*

$$\frac{4-\dfrac{1}{8}}{\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{7}}?$$

Solução. *A dica fundamental para esse exercício é: paciência. Lembre-se de que para somar frações, elas devem ter o mesmo denominador.*

$$\frac{4-\dfrac{1}{8}}{\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{7}} = \frac{\dfrac{8\cdot 4}{8}-\dfrac{1}{8}}{\dfrac{7\cdot 4}{7\cdot 5}+\dfrac{5\cdot 5}{5\cdot 7}} = \frac{\dfrac{32}{8}-\dfrac{1}{8}}{\dfrac{28}{35}+\dfrac{25}{35}} = \frac{\dfrac{31}{8}}{\dfrac{53}{35}} = \frac{31}{8}\cdot\frac{35}{53} = \frac{1085}{424}$$

□

Exercício 3.2. *Reescreva o número $\sqrt[3]{8^5}$ sem usar radicais ou expoentes.*

Solução. *O fundamental aqui é se lembrar de duas propriedades:*

- $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$
- $\sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$

Portanto,

$$\sqrt[3]{8^5} = (8^5)^{\frac{1}{3}} = 8^{5\cdot\frac{1}{3}} = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^{3\cdot\frac{5}{3}} = 2^5$$

Lembramos ainda de uma outra propriedade muito importante ao lidar com expoentes: $a^x a^y = a^{x+y}$, mas ela não ajuda neste problema específico.

□

Exercício 3.3. *Quais valores de x que resolvem a equação $x^2 - 10x + 24 = 0$?*

Solução. *Uma solução rápida é aplicar a "fórmula de Bháskara". Primeiro calculamos*

$$\Delta = 10^2 - 4\cdot 1\cdot 24 = 100 - 96 = 4$$

e daí

$$x = \frac{-(-10)\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{10\pm 2}{2} = 5\pm 1,$$

ou seja, $x = 6$ ou $x = 4$.

Outra solução é lembrar das relações entre coeficientes e raízes: se x_1, x_2 são soluções de $x^2 + bx + c = 0$ então $b = -(x_1 + x_2)$ e $c = x_1 \cdot x_2$. Esta relações são conhecidas como "relações de Girard".

As solução da equação então satisfazem $x_1 + x_2 = 10$, $x_1 x_2 = 24$. Considerando algumas possibilidades, encontramos novamente $x_1 = 4$, $x_2 = 6$. □

Exercício 3.4. *Considere os conjuntos* $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 < 36\}$ *e* $B = \{y \in \mathbb{R},\ 2 < y < 12\}$. *Quantos números inteiros existem no conjunto* $A \cup B$*?*

Solução. *O primeiro passo é descrever melhor ambos os conjuntos:*

$$A = \{x \in \mathbb{R},\ -6 < x < 6\} = (-6, 6) \text{ e } B = \{y \in \mathbb{R},\ 2 < y < 12\} = (2, 12).$$

Atenção! O uso da variável x *na descrição do conjunto* A *e de* y *na descrição do conjunto* B *não deve confundí-lo!*

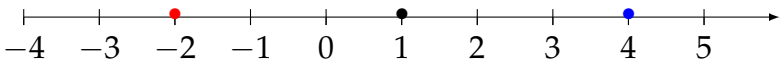
$$A \cup B = (-6, 6) \cup (2, 12) = (-6, 12).$$

Inteiros neste intervalo: $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. *Logo, o conjunto* $A \cap B \cap \mathbb{Z}$ *tem 17 elementos!* □

Exercício 3.5. *Descreva o conjunto-solução da inequação* $|x - 1| < 3$ *em termos de um intervalo.*

Solução. Solução geométrica: *Queremos encontrar todos os números* x *tais que a distância de* x *até* 1*, na reta real, seja menor do que 3.*

Na reta real abaixo, marcamos o número 1*. Caminhando 3 unidades para a direita, chegaremos arbitrariamente perto do número* 4*, e caminhando 3 unidades para a esquerda, chegaremos arbitrariamente perto do número* -2*.*



Portanto, a solução é o intervalo $(-2, 4)$.

Solução algébrica: *Por definição de módulo,* $|x - 1|$ *pode ser* $x - 1$ *ou* $-(x - 1)$*, conforme seja o valor de* x*.*

- *se* $x \geq 1$*, então* $|x - 1| = x - 1$ *e daí a desigualdade fica* $x - 1 < 3$*, ou* $x < 4$*. Lembrando que neste caso estamos com* $x \geq 1$*, a solução é o intervalo* $[1, 4)$.
- *se* $x < 1$*, então* $|x - 1| = 1 - x$ *e daí a desigualdade fica* $1 - x < 3$*, logo* $-2 < x$*. Como neste caso estamos com* $x < 1$ *como hipótese geral, a solução é o intervalo* $(-2, 1)$.

A resposta final é a união dos intervalos obtidos:

$$(-2, 1) \cup (1, 4) = (-2, 4).$$

□

Exercício 3.6. *Quais são as soluções da equação* $x^3 - 9x^2 + 20x = 12$*?*

Solução. *Considere um polinômio mônico que tem como raízes* a, b, c*:*

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Expandindo, obtemos

$$f(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc.$$

Assim, o termo independente é o produto das raízes (com sinal negativo). Portanto, no caso das raízes serem inteiras, cada raiz divide o termo independente.

Considere agora a equação escrita na forma

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0.$$

Então as possíveis raízes inteiras são

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12.$$

Testando, obtemos que as raízes são 1, 2 e 6. □

Observação 3.7. O procedimento do exercício anterior pode ser facilitado usando o método de Briot-Ruffini para divisão de polinômios.

Observação 3.8. Alguns fatos relevantes sobre polinômios:

- Para polinômios de grau 2, sempre podemos achar as raízes usando a fórmula de Bháskara (a pessoa Bháskara nunca existiu).
- Existem fórmulas que dão as raízes de polinômios de grau 3 e 4 (Cardano, Viète, Tartaglia, Ferrari, etc), mas elas são enormes e praticamente sem uso.
- Um matemático chamado Galois, que viveu entre 1811 e 1832, demonstrou que não é possível encontrar uma fórmula para as raízes de polinômios de grau ≥ 5, de modo que a fórmula só dependa só dos coeficientes do polinômio.

Uma versão mais longa desta história está contada, com todos os detalhes matemáticos, na dissertação de mestrado de Valmir R. Moretti, *Um estudo sobre métodos algébricos de resolução de equações algébricas com proposta de atividades para o ensino básico*, que pode ser acessada em `http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/306084`.

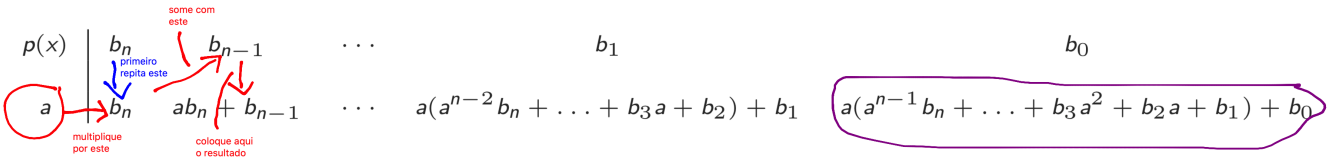
Observação 3.9 (Divisão de polinômios)**.** Se $p(x), h(x)$ são polinômios não-nulos, podemos sempre dividir $p(x)$ por $h(x)$, obtendo polinômios $q(x), r(x)$ de modo que

$$p(x) = h(x)q(x) + r(x), \tag{1}$$

com o grau de $r(x)$ menor que o grau de $h(x)$. Uma forma de obter $q(x), r(x)$ é pelo algoritmo de Euclides, aquele método que aprendemos lá no ensino fundamental. Outra possibilidade é por tentativa e erro, tomando com base um "chute inicial" bem qualificado, considerando os graus dos polinômios envolvidos.

No caso de $x = a$ ser uma raiz de $p(x)$, ou seja, $p(a) = 0$, se tomarmos $h(x) = (x - a)$ na equação (1) obteremos $r(x) = 0$. Como obter $q(x)$?

Um método bem eficiente para fatorar um polinômio é o desenvolvido por Briot e Ruffini. Seja $p(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_n x^n$. Veremos se $x = a$ satisfaz $p(a) = 0$:



Caso $p(a) = 0$, a última entrada da 2a linha (circulado em roxo) será zero e os demais coeficientes serão os coeficientes de

$$q(x) = c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0,$$

com $p(x) = (x-a)q(x)$.

Exercício 3.10. *Qual é a equação da reta que é ortogonal à reta*

$$y - 5x = 2?$$

Solução. *Existem várias formas interessantes de resolver esta questão, apresentarei uma delas, que não é a mais simples, mas é uma bela solução. Vamos construir uma reta que é ortogonal à reta do enunciado (que chamaremos de r) e encontra com ela no eixo y.*

A reta r intercepta o eixo y no ponto $(0,2)$ e intercepta o eixo x no ponto $(-2/5,0)$. Considere uma reta s que passa por $(0,2)$ e é ortogonal à reta r. Esta reta tem equação $y = ax + 2$ e encontra o eixo x no ponto $(-2/a,0)$, com $a < 0$.

Os pontos $A = (-2/a,0)$, $B = (0,2)$ e $C = (-2/5,0)$ são vértices de um triângulo retângulo. Portanto, as medidas dos lados deste triângulo satisfazem ao Teorema de Pitágoras:

- $|AB| = \sqrt{4/a^2 + 4}$
- $|BC| = \sqrt{4/25 + 4}$
- $|AC| = 2/a + 2/5$

Logo, $(a + 2/5)^2 = (4/a^2 + 4) + 4/25 + 4$, o que nos dá

$$a = 1/5$$

e a equação de s é

$$5y - x = 2.$$

□

Exercício 3.11. *A expressão $e^{\ln 3} + \log_2(2^7)$ é o mesmo que:*

Solução. *Neste exercício, precisamos nos lembrar que a função exponencial é a inversa da função logaritmo.*

- *$\log_2(b) = a$ significa que $2^a = b$; portanto, $\log_2(2^7)$ é um número que, quando elevamos 2 a ele, resulta em 2^7. A única possibilidade é o 7. Assim, $\log_2(2^7) = 7$.*
- *Analogamente, podemos pensar $e^{\ln a}$ como sendo e elevado a um número tal que, quando elevamos e a este número, resulta em a. Ora, a única possibilidade é este número ser a.*

Assim, esperando que você não tenha se perdido no jogo de palavras acima, temos que

$$e^{\ln 3} + \log_2(2^7) = 3 + 7 = 10.$$

□

Exercício 3.12. *Quantas soluções a equação* $\cos(8x) = 1/2$ *possui no intervalo* $[0, 2\pi]$*?*

Solução. Solução algébrica: *Quantas soluções a equação* $\cos(x) = 1/2$ *tem em* $\mathbb{R}$*? Você deve conhecer pelo menos uma:* $\pi/6$*.*

Como a função cosseno é 2π*-periódica, qualquer valor do tipo* $\pi/6 + 2k\pi$ *também resultará em* $1/2$*.*

Existem outros valores? Dê uma olhada no ciclo trigonométrico: você vai achar mais uma solução, já que a função é par: $7\pi/6$*.*

Portanto, todos os valores da forma $7\pi/6 + 2k\pi$ *também nos servem. Portanto, se* $x = \pi/6 + 2k\pi$ *ou* $x = 7\pi/6 + 2k\pi$*, teremos o valor* $1/2$*.*

E no caso de $8x$*? Simples: sempre que* $8x = \pi/6 + 2k\pi$ *ou* $8x = 7\pi/6 + 2k\pi$*, teremos o valor* $1/2$*.*

Simplificando as expressões, deveremos ter

$$x = \pi/48 + k\pi/4 \text{ ou } x = 7\pi/48 + k\pi/4, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Agora basta contar quantos números estão em $[0, 2\pi]$*: o total será 16.*

Solução geométrica: *Qual o efeito de trocar* x *por* $8x$*? Tudo que acontecia no intervalo* $[0, 2\pi]$ *acontecerá no intervalo* $[0, 2\pi/8] = [0, \pi/4]$*.*

Como o $\cos(x)$ *vale* $1/2$ *em dois valores em* $[0, 2\pi]$*, então* $\cos(8x)$ *valerá* $1/2$ *em dois valores no intervalo* $[0, \pi/4]$*.*

Como a função é periódica, e "cabem" 8 intervalos $[0, \pi/4]$ *no intervalo* $[0, 2\pi]$*, terão* $8 \cdot 2 = 16$ *pontos em que* $\cos(8x)$ *vale* $1/2$*.*

□

Exercício 3.13. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + b, & x \leq 5, \\ -x + 3, & x > 5. \end{cases}$$

Qual valor de b faz com que o gráfico de $y = f(x)$ *seja "contínuo" (possa ser esboçado sem tirar o lápis do papel)?*

Solução. *Se usarmos* $x = 5$ *na primeira expressão, obteremos* $f(5) = 10 + b$*. Não podemos usar* $x = 5$ *na segunda expressão para* $f(x)$*, pois a função só está definida para* $x > 5$*. Porém, para um valor de* $x > 5$ *próximo de 5, o valor de* $f(x)$ *será muito próximo de* 2*.*

Portanto, se $10 + b = 2$*, então poderíamos fazer o gráfico "sem tirar o lápis do papel", resultando em* $b = -8$*.* □

Exercício 3.14. *Se no exercício anterior, a função fosse definida como*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 36}{x - 6}, & x \neq 6, \\ b, & x = 6, \end{cases}$$

qual seria o valor de b? Explique.

Solução. *Note que para* $x \neq 6$*, temos que*

$$\frac{x^2 - 36}{x - 6} = \frac{(x-6)(x+6)}{x-6} = x + 6, \;\; x \neq 6.$$

Portanto, na medida que x *se aproxima de* 6*, o valor de* $f(x)$ *se aproxima de* 12*. Logo, em* $x = 6$*, se o valor não for* 12*, teremos um "buraco" no gráfico. Assim, a única possibilidade é* $b = 12$*.*

□

4 Algumas notações

4.1 Conjuntos numéricos

Iremos trabalhar com números reais, que é um grande conjunto de números. Na verdade, explicar exatamente como é o conjunto dos números reais é algo que está fora do escopo deste curso.

A própria noção de conjunto será tratada aqui de modo bastante intuitivo. Por exemplo, teremos:

- os conjuntos finitos $X_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$,
- o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$ com a relação

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad - bc = 0.$$

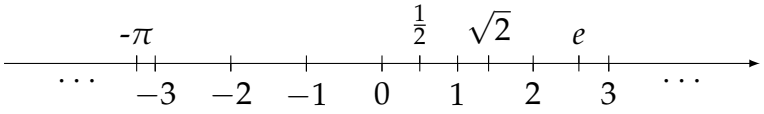
A seguir, temos conjuntos que para serem definidos formalmente precisam de uma noção matemática chamada "completude" (que não será abordada neste curso, e você não precisa se preocupar neste momento):

- o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$,
- o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Temos a sequência de inclusões

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nosso foco será no conjunto dos números reais. Por $\mathbb{R}$ ser ordenado, podemos representar $\mathbb{R}$ por uma reta, orientada positivamente para a direita.



Note que esta reta "não tem buracos".

Observação 4.1. Se representássemos $\mathbb{Q}$ por uma reta, esta reta deveria ter buracos. Ainda vamos voltar a falar sobre isto neste curso.

Dado $a \in \mathbb{R}$, vamos definir o valor absoluto de a, ou modulo de a, denotado por $|a| \in \mathbb{R}$, como

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Ou seja, se a é um número positivo, então $|a| = a$, e se a é um número negativo, então $|a|$ é a "versão positiva" do a, ou seja, $-a$. Por exemplo $|4| = 4$, $|-3| = 3$.

É importante lembrar de novo: $|a|$ é sempre um número maior ou igual a 0.

Podemos aproveitar a notação $|\cdot|$ para introduzir o conceito de distância entre dois números reais: dados dois números reais $a, b \in \mathbb{R}$, definimos a **distância** entre a, b como sendo $d(a,b) = |a-b|$.

Veja na representação da reta real que colocamos no começo desta seção o significado desta "distância".

4.1.1 Intervalos da reta: subconjuntos especiais

Quase sempre iremos trabalhar com subconjuntos especiais de $\mathbb{R}$ ao invés de todo o conjunto $\mathbb{R}$.

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$

⋆ Intervalos limitados vs ilimitados

⋆ Cuidado: ∞ é só uma notação

⋆ Intervalo com centro a e raio $\varepsilon > 0$: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

⋆ Para intervalos limitados, o tamanho/comprimento do intervalo é definido como sendo a distância entre suas extremidades.

⋆ a, b são pontos extremos, ou extremidades, ou pontos de fronteira dos intervalos ao lado.

⋆ a notação "$]0,1[$" para intervalo aberto é obsoleta.

Agora que temos o básico definido, podemos começar a resolver alguns pequenos problemas matemáticos.

Exemplo 4.2. Resolva a inequação

$$3x + 2 \geq 0$$

para $x \in \mathbb{R}$. ◁

Exemplo 4.3. Resolva a inequação

$$\frac{2x+1}{x-4} < 0$$

para $x \in \mathbb{R}$. ◁

Exercício 4.4. *Resolva a equação* $|2x+1| = 3$.

Exercício 4.5. *Resolva a equação* $|3x-2| < 7$.

5 Exemplos importantes de funções

5.1 Funções

Considere A, B conjuntos não-vazios. Uma função

$$f : (A, B, a \mapsto b)$$

é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$.

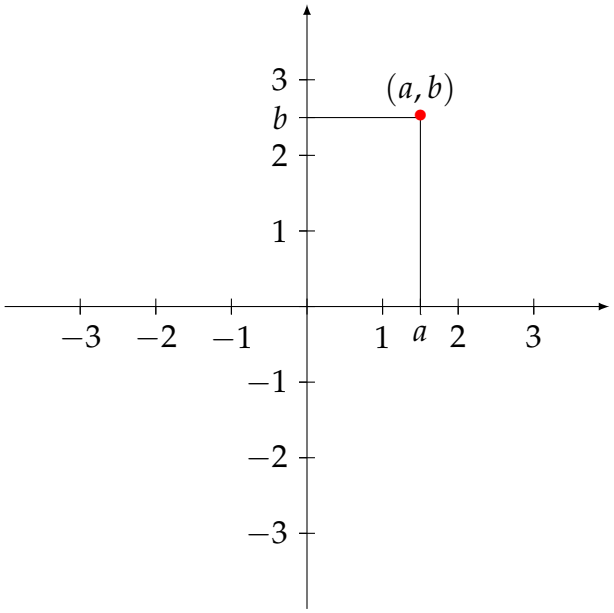
Em geral a função é denotada por $f : A \to B$ e a relação denotada por $f(x) = y$. O conjunto A é o domínio de f, enquanto o conjunto B é o contra-domínio de f.

Quando $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$, dizemos que f é uma função real a valores reais. Dada uma função $f : A \to B$, o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, f(x));\ x \in A\}$$

é o gráfico de f.

No caso em que $A, B \subset \mathbb{R}$, em geral o gráfico de f será representado no plano cartesiano. Para representarmos um ponto (a, b) no plano cartesiano, a primeira coordenada, a, será marcada no eixo horizontal e a segunda coordenada, b, no eixo vertical.



Assim, para fazer o gráfico de $f : A \to B$, deveremos representar o conjunto

$$Gr(f) = \{(x, f(x));\ x \in A\},$$

ou seja, todos os pontos que sejam da forma $(x, f(x))$ com $x \in A$.

Observação 5.1. Importante: Marcar alguns pontos do gráfico de $f(x)$ no plano cartesiano e uní-los não é suficiente para obter o gráfico da função! Isto só funciona para funções da forma $f(x) = ax + b$, cujos gráficos são retas.

Exemplo 5.2 (função constante)**.** Qual o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2$? ◁

Exemplo 5.3. Qual o gráfico da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3x$? ◁

Exemplo 5.4. Qual o gráfico da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 2x + 1$? ◁

Exemplo 5.5. Qual o gráfico da função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = x^2 - 1$? ◁

5.1.1 Funções polinomiais

Um polinômio é uma expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Se todos os a_j's forem iguais a zero, $p(x)$ é o polinômio nulo. Caso contrário, o grau de $p(x)$ é o maior j tal que $a_j \neq 0$.

Uma função polinomial é uma função da forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $f(x)$ é um polinômio. Neste curso, polinômio e função polinomial serão *quase sempre* coisas indistintas.

Exemplo 5.6. $p(x) = 1 + x + x^5$ é um polinômio de grau 5. ◁

5.1.2 Funções racionais

Uma função da forma

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

com $p(x), q(x)$ polinômios, é chamada de função racional. O domínio de $r(x)$ é $\mathbb{R} \setminus A$, onde A é o conjunto dos zeros de $q(x)$, onde a fração não está definida.

Exemplo 5.7. $r(x) = \dfrac{2 + x^4}{1 + x^3}$ é uma função racional. ◁

Exemplo 5.8. Qual é o domínio da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$? E seu gráfico? ◁

Exemplo 5.9. Como é o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$? ◁

5.1.3 Funções pares e funções ímpares

Considere uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida num domínio simétrico.

- A função $f(x)$ é par se $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in A$.
- A função $f(x)$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in A$.

Proposição 5.10. *Toda função $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida num domínio simétrico pode ser escrita como $g(x) = p(x) + r(x)$, com p uma função par e r uma função ímpar.*

$$p(x) = \frac{g(x) + g(-x)}{2},\ r(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2}$$

5.1.4 A função módulo

A noção de valor absoluto de um número real nos permite definir uma função, chamada de função módulo: $x \mapsto |x|$.

Exemplo 5.11. Como é o gráfico de $y = |x|$? ◁

Exemplo 5.12. Como é o gráfico de $f(x) = |x + 1| + 2$? ◁

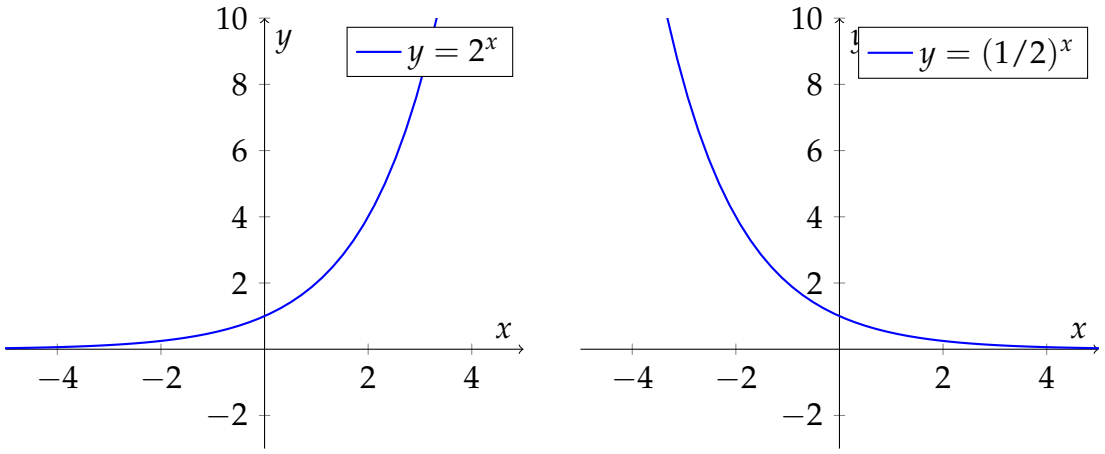
5.1.5 Função exponencial

Seja $a > 0$ real e considere a função $y = f(x) = a^x$.

Propriedades:

- $a^r a^s = a^{r+s}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $a^r / a^s = a^{r-s}$
- $(ab)^r = a^r b^r$
- Se $a > 1$ e $r < s$ então $a^r < a^s$.
- Se $0 < a < 1$ e $r < s$ então $a^r < a^s$.

Note que a função $f(x) = a^x$ pode ser crescente ou decrescente, conforme seja a:



5.1.6 Funções trigonométricas

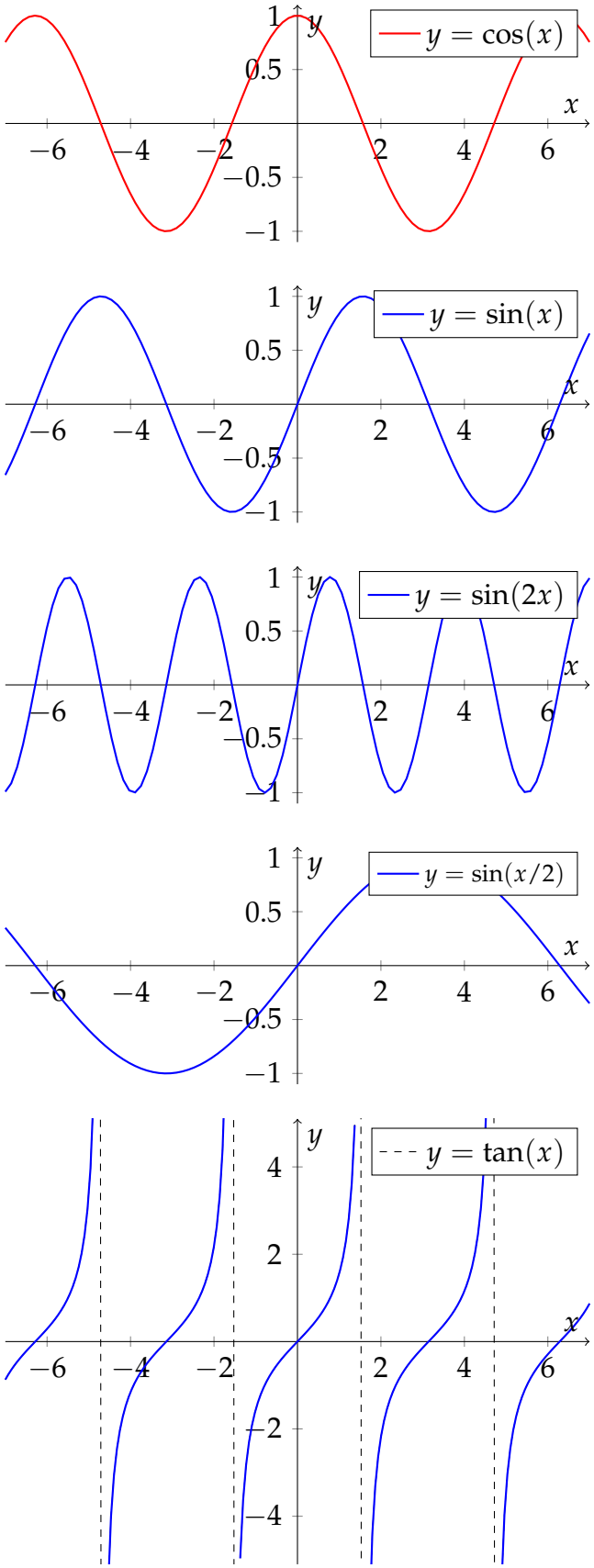
Teorema 5.13. *Existe um único par de funções definidas em* $\mathbb{R}$, *indicadas por* $\operatorname{sen}(x)$ *e* $\cos(x)$, *que satisfazem:*

- $\operatorname{sen}(0) = 0, \cos(0) = 1$
- *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$.
- *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(a)$.
- *Existe* $r > 0$ *tal que* $0 < \operatorname{sen}(x) < x < \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$, *para* $0 < x < r$.

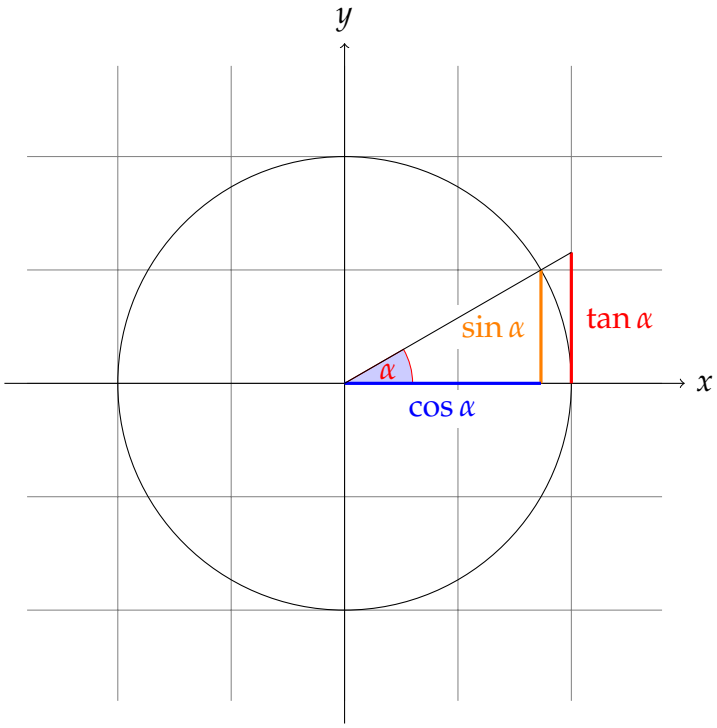
Definimos também

$$\operatorname{tg}(x) = \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}.$$

Vamos ver alguns dos gráficos de funções trigonométricas.



É importante ter em mente também o ciclo trigonométrico, para entender pelo menos a relação entre α, $\cos(\alpha)$, sen (α) e $\tan(\alpha)$.



5.1.7 Efeitos de modificações no argumento da função

Suponha que você conhece o gráfico de

$$y = f(x).$$

Como é o gráfico de modificações "simples" deste gráfico, por exemplo

$$y = 2 \cdot f(x), \;\; y = f(3x), \;\; y = f(x) + 1, \;\; y = f(x - 1)?$$

Exemplo 5.14. Construa todas as variações acima do gráfico de $y = x^2$. ◁

5.2 Exercícios

Exercício 5.15. *Qual o gráfico da função* $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = 3x + 2$*?*

Exercício 5.16. *Qual o gráfico da função* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $h(x) = -x + 2$*?*

Exercício 5.17. *Qual o gráfico da função* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $p(x) = 1 - x - x^2$*?*

Exercício 5.18. *Como é o gráfico de* $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 2}$*?*

Exercício 5.19. *Como é o gráfico de* $g(x) = |x + 1| - |x - 2|$*?*

Exercício 5.20. *Construa os gráfico de* $y = \cos(x + \pi/3)$, $y = \cos(3x)$, $y = \cos(2x) + 1$ *e* $y = 2\cos(x) - 1$.

6 Operando com funções, e exemplos mais complexos

6.1 Operações com funções

Dados A, B conjuntos, vamos denotar por $F(A,B)$ o conjunto de todas as funções de A para B.

Exercício 6.1. *Descreva TODAS as funções* $f : \{1,2,3\} \to \{a,b,c,d\}$.

Observação 6.2. Se $A, B \subset \mathbb{R}$, então $F(A,B)$ é um conjunto ENORME.

Dadas $f, g \in F(A,B)$ então podemos definir as funções

$$(\alpha f) : A \to B,\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$$(f+g) : A \to B,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g) : A \to B,\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Ou seja, estas definições são feitas pontualmente. Podemos também "compor" funções. Se $A, B, C \subset \mathbb{R}$, com $f : B \to C$ e $g : A \to B$, definimos a composição de f com g como a função

$$(f \circ g) : A \to C,\ (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Exemplo 6.3. Considere $A = B = C = \mathbb{R}$ e as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 3$. Calcule $f(g(x))$ e $g(f(x))$. ◁

Observação 6.4. A composição de funções tem algumas propriedades interessantes:

1. A composição de funções não é comutativa (vimos!).
2. Nem sempre podemos compor duas funções: cuidado com os domínios.
3. A existência de $f(g(x))$ não garante a existência de $g(f(x))$.

Exemplo 6.5. No caso em que

$$f : A \to A,$$

é possível compor f com f, obtendo $f^{(2)}(x) = f(f(x))$. Esta função é chamada de iterada de ordem 2 de f. Podemos considerar também

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(\ldots(x)\ldots))}_{n}$$

o n-ésimo iterado de f. ◁

Exemplo 6.6. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & , \ n \text{ impar}, \\ n/2 & , \ n \text{ par}. \end{cases}$$

Calcule $f^{(10)}(n)$ para alguns números. ◁

O exemplo anterior é bem importante:

Teorema 6.7 (Conjectura de Collatz)**.** *Considere a função* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por*

$$f(n) = \begin{cases} 3n+1 & , \ n \text{ impar}, \\ n/2 & , \ n \text{ par}. \end{cases}$$

Então, para todo natural positivo $k \in \mathbb{N}$*, teremos* $f^{(n)}(k) = 1$ *para algum valor grande de n (e daí a função se repete como* $4, 2, 1$*).*

Este resultado já foi verificado para todos os números menores do que 2^{68}, mas ainda não existe uma prova de que seja verdadeiro. Duvida que contra-exemplos podem aparecer em valores bem altos?

Exemplo 6.8 (Conjectura de Pólya)**.** Em 1937, Pólya apresentou o seguinte problema: dado um número natural $n > 0$, construa dois conjuntos:

- $A = \{2 \leq j \leq n;\ j \text{ tem um número ímpar de fatores primos}\}$
- $B = \{2 \leq j \leq n;\ j \text{ tem um número par de fatores primos}\}$

Conjecturou-se o seguinte: o tamanho do conjunto A é maior ou igual ao tamanho do conjunto B. Ou, de forma equivalente: dado n, a maioria dos números entre 2 e n tem um número ímpar de fatores primos. O primeiro natural n em que isso dá errado é $n = 906\,150\,257$. ◁

Exercício 6.9. *Considere as funções*

$$f(x) = \begin{cases} -1-2x & , \ x \leq 0, \\ -2+x & , \ x > 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -3+x & , \ x \leq 1, \\ 1-3x & , \ x > 1. \end{cases}$$

Calcule, se possível, $f(g(x))$ *e* $g(f(x))$*, determinando seus domínios, contra-domínios, imagens e gráficos.*

6.2 Invertendo funções

Seja $f : A \to B$ uma função. Suponha que exista outra função $g : B \to A$ tal que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$. Neste caso diremos que f é invertível e g é a inversa de f. Denotamos por $g = f^{-1}$.

Observação 6.10. A inversa $f^{-1}(x)$ costuma ser bem diferente da função $1/f(x)$, cuidado!

Exemplo 6.11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x + 3$. Esta função tem inversa? Exiba $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(g(x)) = x$ e $g(f(x)) = x$.
◁

Em geral vamos usar o termo “tem inversa"quando a função pode ter uma inversa, ainda que tenhamos fazer uma adaptação no domínio/contra-domínio.

Exemplo 6.12. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ tem inversa? E se reduzirmos o domínio, é possível que ela tenha inversa? E sobre $g(x) = x^3$?
◁

Exercício 6.13. *Encontre uma função* g *tal que* $g \circ (2f) = f + h$*, onde* $f(x) = 2x + 5$ *e* $h(x) = x^3 - 2x$*.*

6.3 Funções injetoras e sobrejetoras

Seja $f : A \to B$ uma função. Dizemos que f é injetora se $f(x) = f(y)$ implicar $x = y$. Dizemos que f é sobrejetora se para todo $b \in B$, existir $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Quando uma função é injetora e sobrejetora, dizemos que a função é bijetora.

Teorema 6.14. *Toda função bijetora tem inversa.*

Observação 6.15. Pense um pouco no gráfico de uma função injetora.

Exercício 6.16. *Toda função da forma $f(x) = ax + b$ é bijetora?*

Exercício 6.17. *Polinômios que só tenham termos de grau par podem ser bijetores? (ex. $p(x) = x^6 - 5x^4 + x^2 + 2$).*

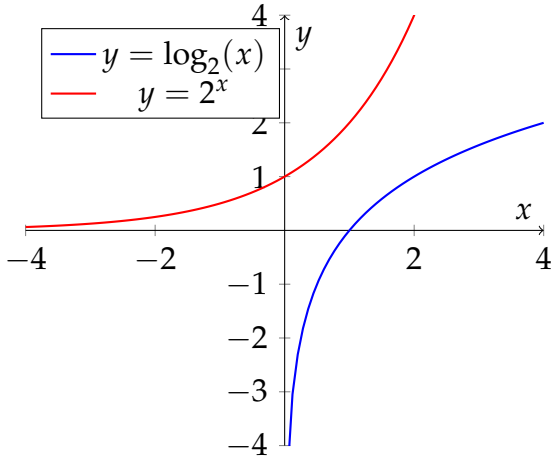
Exercício 6.18. *Quando uma função polinomial tem inversa? $Q(x) = x^7 + x^5 + x$ tem inversa? Qual é a inversa?*

Exemplo 6.19. Fixado $a \in \mathbb{R}$, definimos $y = f(x) = a^x$. Esta função admite uma inversa, chamada de logarítmo na base a, denotada por $\log_a(x)$, que satisfaz

$$\log_a(f(x)) = x.$$

Temos:

$$a^{\log_a(x)} = x,\ \log_a(a^x) = x.$$



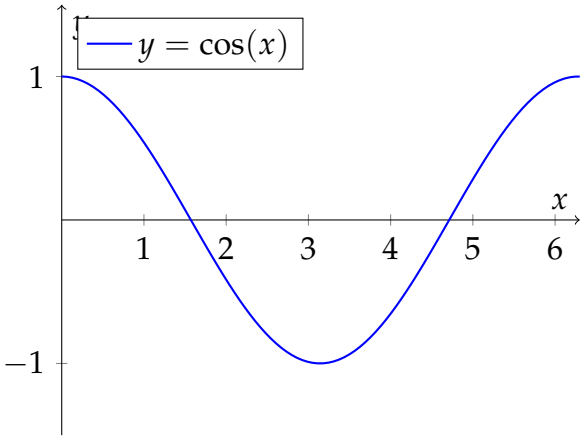
◁

Exercício 6.20. *Determine o domínio onde as funções $y = \operatorname{sen}(x)$ e $y = \tan(x)$ são invertíveis e faça os gráficos de suas funções inversas.*

Exercício 6.21. *Determine o domínio e faça o gráfico de*

- $\sec(x) = 1/\cos(x)$ *(secante),*
- $\operatorname{csc}(x) = 1/\operatorname{sen}(x)$ *(cossecante) e*
- $\operatorname{cotan}(x) = 1/\tan(x)$ *(cotangente) e de suas funções inversas.*

Exemplo 6.22. Em qual domínio $y = \cos(x)$ é injetora?



◁

7 Limites de funções reais

7.1 Limites

Inicialmente, veremos noções intuitivas de limite. Na Seção 7.4, definições formais serão apresentadas.

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ uma função e $a \in A$.[2] Vamos dizer que o **limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** $x = a$ **é igual a** $L \in \mathbb{R}$ se, quando os valores de x **se aproximam** de a, tanto pela direita quanto pela esquerda, os valores de $f(x)$ se aproximam do número L. Note que não estamos definindo formalmente o que significa "se aproximar de a".

A notação para "o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é igual a L" é

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Diremos que a função f é **contínua em** $x = a$ quando for possível escolher $L = f(a)$ na definição anterior, ou seja, quando

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Se ela for contínua em todos os pontos de seu domínio, diremos apenas que ela é contínua. Note que, para analisar a continuidade, o ponto $x = a$ deve estar no domínio da função.

Exercício 7.1. *Estude, de forma gráfica e sem muita precisão, se as funções abaixo tem limite nos pontos indicados, e calcule o limite se for o caso.*

a) $f(x) = x + 3$, *ponto* $x = 2$.

b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, *ponto* $x = 1$.

c) $h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, *ponto* $x = 2$.

Exercício 7.2. *Considere a função*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & , \quad x \neq 3, \\ b & , \quad x = 3. \end{cases}$$

a) Esta função tem limite em $x = 3$*?*

b) Qual deve ser o valor de b para que a função seja contínua?

[2] Não é realmente necessário que a esteja no domínio da função. Ele pode ser um "ponto de acumulação", o que significa que estará bem perto do domínio. No caso do domínio ser um intervalo aberto, ele pode ser um dos extremos, por exemplo.

7.2 Retas tangentes

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ uma função e $a \in A$. Para obter a reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$, uma boa estratégia é aproximar esta reta tangente pelas retas secantes "próximas" do ponto $(a, f(a))$.

Seja $h > 0$ um número real pequeno. O coeficiente angular da reta que corta o gráfico de $y = f(x)$ nos pontos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$ é

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Quando h está muito próximo de zero, os pontos $(a, f(a))$ e $(a + h, f(a + h))$ ficam muito próximos um do outro, e a reta secante é "quase" uma reta tangente. A inclinação da reta tangente ao gráfico da função num ponto $x = a$ será dada pelo limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ou pelo limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

quando estes limites existem (é possível passar do primeiro limite para o segundo com uma mudança de variáveis).

Exemplo 7.3. Vamos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ em (a, a^2).

Devemos calcular

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a + h)$$

Ainda que não saibamos calcular limites, é natural considerar que quando h fica próximo de zero, $2a + h$ fica próximo de $2a$. Logo, a reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ no ponto (a, a^2) é dada por

$$y = 2ax - a^2.$$

A reta tangente ao ponto $(1, 1)$, por exemplo, é $y = 2x - 1$. ◁

Quando os limites acima existem, eles são chamados de **derivada de** $f(x)$ **no ponto** $x = a$, denotado por:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Portanto, a reta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$, quando existe, terá como expressão

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a.$$

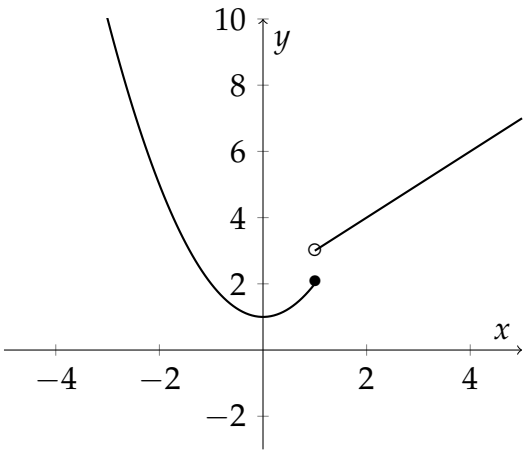
7.3 Limites laterais

Primeiro vamos a dois exemplos em que os limites não existem. Veremos, no entanto, que ele pode "não existir" de várias formas.

Exercício 7.4. *Considere a função*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad x \leq 1, \\ x + 2 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

cujo gráfico é

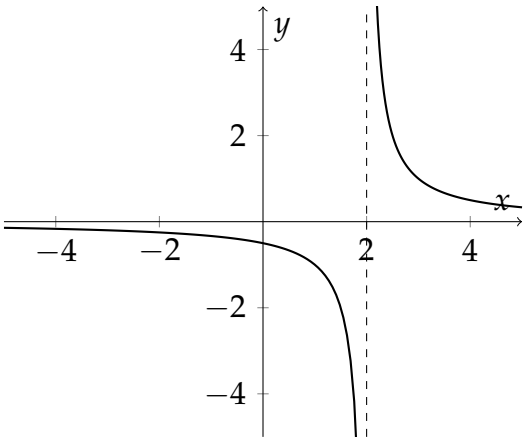


Existe o limite em $x = 1$?

Exercício 7.5. *Considere a função*

$$h(x) = \frac{1}{x-2}, \; x \neq 2,$$

cujo gráfico é



Existe o limite em $x = 2$?

No Exemplo 7.4:

- quando x se aproxima de 1 pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de 2;
- quando x se aproxima de 1 pela direita, $f(x)$ se aproxima de 3.

Isto nos motiva definir **limites laterais**.

O **limite à esquerda de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a é igual a M se $f(x)$ se aproxima de M quando x se aproxima de a pela esquerda. O **limite à direita de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a é igual a N se $f(x)$ se aproxima de N quando x se aproxima de b pela direita. Note que novamente estamos usando "se aproxima" de forma pouco precisa.

Utilizaremos as notações

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = N$$

para indicar os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente.

Observação 7.6. É importante ressaltar que o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ só existe quando ambos os limites laterais $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existem e são iguais.

Exemplo 7.7 (Exemplo 2 revisitado)**.** A função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & , \quad x \leq 0, \\ x + 1 & , \quad x > 0, \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos diferentes de $x = 0$. Logo, para todo $x \neq 0$, temos que os limites laterais coincidem e

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Em $x = 0$ temos

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Logo, a função é descontínua em $x = 0$. ◁

Em geral, para decidir se a função $f(x)$ é contínua em $x = a$, temos que conferir três coisas:

- se a função está definida em $x = a$, ou seja, se $f(a)$ existe,
- se os limites laterais $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existem e são iguais,
- se $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exercício 7.8. *A função* $f(x) = |x|$ *é contínua em todos os seus pontos (prove!). Calcule os limites laterais de* $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ *no ponto* $x = 0$*.*

7.4 Definição formal de limite

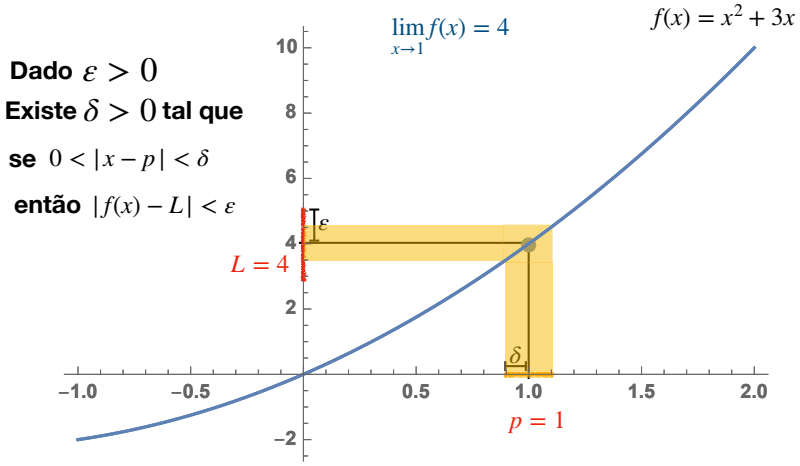
Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ uma função. Seja $a \in A$ ou então suponha que a é extremidade de um intervalo que esteja no domínio de f.[3] **Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in A$ temos**

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Quando tal número L existe, denotaremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

No caso dos limites laterais, a única diferença na definição acima é que a condição $0 < |x - a| < \delta$ será trocada por $0 < x - a < \delta$ (limite à direita) ou por $0 < a - x < \delta$ (limite à esquerda), pois neste caso sabe-se exatamente onde o x está.



É preciso encontrar $\delta > 0$, que sempre vai depender de $\varepsilon > 0$, que faça esta condição funcionar.

Exercício 7.9. *Estude, por ε e δ, o limite de $f(x) = 3x + 2$ no ponto $x = 1$.*

Exercício 7.10. *Se $f(x) = mx + n$ então $\lim_{x \to p} f(x) = mp + n$. Além disto, f é contínua.*

Exemplo 7.11. Vamos mostrar que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ é contínua em todo o seu domínio.

Seja $p > 0$. O caso $p \leq 0$ fica de exercício para casa. Vamos mostrar que $g(x)$ é contínua em $x = p$, ou seja, que

$$\lim_{x \to p} f(x) = p^2.$$

[3] Situação geral: a é um ponto de acumulação de A.

Seja $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - p^2| < \varepsilon.$$

Como

$$|f(x) - p^2| = |x^2 - p^2| = (x - p)(x + p)|,$$

caso $|x - p| < \delta$ teremos

$$-\delta < x - p < \delta,$$

o que é equivalente a

$$-\delta + p < x < \delta + p.$$

Somando p na desigualdade anterior, temos

$$-\delta + 2p < x + p < \delta + 2p.$$

Agora supondo que $\delta < p$, temos

$$-p + 2p < x + p < p + 2p,$$

ou ainda

$$-3p < x + p < 3p,$$

o que implica $|x + p| < 3p$.

O que temos até agora:

- $|x - p| < \delta$ (ainda temos que escolher δ)
- $|x + p| < 3p$

Escolhendo $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3p}, p\right\}$ obtemos que se $0 < |x - p| < \delta$ então

$$|f(x) - p^2| = |x - p||x + p| < \delta \cdot 3p < \varepsilon,$$

como queríamos demonstrar. Logo $\lim_{x\to p} f(x) = f(p) = p^2$ e a função é contínua em $x = p$. ◁

Exemplo 7.12. Não é difícil mostrar, por ε e δ, que a função $f(x) = 1/x$ é contínua em todos os pontos do seu domínio. Em $x = 0$, no entanto, o limite não existe. Quando aproximamos de 0 pela direita, os valores de $1/x$ aumentam indefinidamente, e quando aproximamos de 0 pela esquerda, os valores de $1/x$ são números negativos de módulo cada vez maior. Na próxima aula veremos detalhes sobre este tipo de comportamento. ◁

7.5 Propriedades

Teorema 7.13. *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = M$ *então:*

- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$,

- $\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = k \cdot L = k \lim_{x\to a} f(x)$,

- $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$,

- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *se* $M \neq 0$.

Teorema 7.14. *As funções dos tipos abaixo são contínuas em todos os pontos de seus domínios:*

- *funções polinomiais,*
- *funções racionais,*
- *funções trigonométricas (e suas inversas),*
- *funções exponenciais (e sua inversa a função logaritmica),*
- *funções "raízes".*

Exercício 7.15. *Calcule*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1}.$$

Exercício 7.16. *Calcule*

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}.$$

Exercício 7.17. *Calcule*

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4x + 3}.$$

Junto com os dois teoremas anteriores, o próximo nos ajudará a calcular vários limites.

Teorema 7.18. *Se f é contínua em $x = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a)) = f(b).$$

Um enunciado coloquial do teorema anterior poderia ser: "o limite entra no argumento da função". Ou seja, para funções que estão nas hipóteses do teorema, temos que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Exercício 7.19. *Calcule*

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}.$$

Exercício 7.20. *Calcule*

$$\lim_{t\to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}.$$

Exercício 7.21. *Mostre que $f(x) = x + 1/x$ é contínua para todo $x > 0$.*

Exercício 7.22. *Mostre que a função*

$$q(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é contínua na origem.

Exercício 7.23. *Estude a continuidade da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 1}{x^2 - 9}$. O que acontece quando $x \to \pm 3$?*

Exemplo 7.24 (Exemplo da Georgia: dado ε, e se não existir o δ?)**.** Mostre que a função abaixo não é contínua na origem:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 0, \\ 1 & , \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Ou seja, dado ε, tente achar o δ e veja o que acontece! ◁

8 Limites infinitos e limites no infinito

Revisão da aula anterior.

Exemplo 8.1. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 1, \\ x^2 + 2, & x > 1. \end{cases}$$

Calcule $\lim_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1} f(x)$. ◁

Exemplo 8.2. Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2}.$$

◁

Exemplo 8.3. Calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1}.$$

◁

Exemplo 8.4. Calcule

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2 + x + e^x}{x^2 + 2\cos(x)} \cdot \pi \right).$$

◁

8.1 Vamos falar sobre o infinito.

Neste curso, o símbolo ∞ não tem um significado individualmente, fora de um contexto. Por enquanto, ∞ será só uma forma de representar alguns tipos de comportamento das variáveis.

Vamos pensar um pouco no comportamento da função $f(x) = 1/x$. Quando temos valores positivos de x, mas muito pequenos, então $1/x$ fica muito grande, sem se aproximar de um valor específico. Quando os valores de x são negativos e muito pequenos, então $1/x$ fica um número negativo que em módulo é muito grande. Em ambos os casos, o limite não existe, pois $1/x$ não se aproxima de nenhum valor fixo quando x se aproxima de zero.

Isto nos motiva a fazer a seguinte definição. Diremos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é infinito ($+\infty$) quando $f(x)$ aumenta muito conforme x se aproxima de a:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Em termos de ε, δ, significa que dado um $M > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > M$ sempre que $|x - a| < \varepsilon$.

Mais uma vez é importante ressaltar que este é um caso de limite que não existe, mas que tem propriedades muito importantes, então ganhará uma definição própria.

Exemplo 8.5. Calcule

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x + 1}.$$

◁

Exemplo 8.6. Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}.$$

◁

Considere agora $f(x)$ uma função e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que (α, ∞) está contido no domínio de f. A notação

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > \alpha$ tal que $x > \delta > \alpha$ implica

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ou seja: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ significa que quando x vai ficando MUITO grande, $f(x)$ vai se aproximando de L. Analogamente definimos $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Exemplo 8.7. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}.$$

◁

Exemplo 8.8. Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}.$$

◁

Exemplo 8.9. Determine os valores de c para os quais existe o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{cx^4 - x^2 + 3}{x^3 - x + 3}.$$

◁

Outro caso em que não existe o limite é quando o limite "dá infinito". Seja $f(x)$ uma função tal que o intervalo (α, ∞) está contido em seu domínio. Denotaremos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

se para todo $M > 0$, existe $N > \alpha > 0$ com $f(x) > M$ sempre que $x > N$. Ou seja: **quando os valores de x aumentam muito, os de $f(x)$ também aumentam**.

Exemplo 8.10. Calcule $\lim_{x\to\infty} x^2$. ◁

Exemplo 8.11. Calcule $\lim_{x\to\infty} xe^x$. ◁

Observação 8.12. As propriedades utilizadas nos cálculos dos limites quando $x \to a$ também valem no caso de $x \to \infty$, lembrando que cada limite envolvido nas "separações" precisa existir (por exemplo

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = (\lim_{x\to\infty} f(x)) + (\lim_{x\to\infty} g(x))$$

se, e só se, cada um destes limites existe).

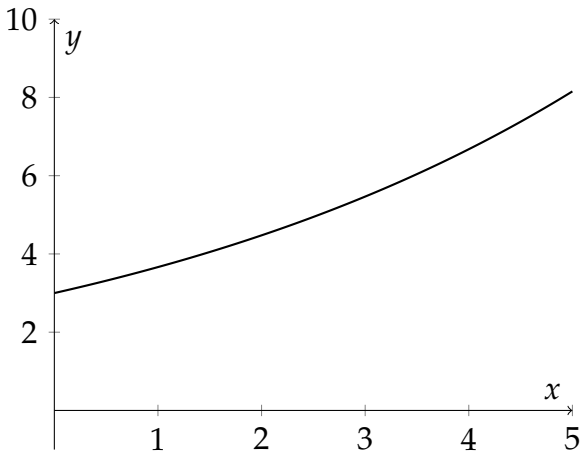


Figura 1: Gráfico do modelo de Malthus.

8.2 Assíntotas

O cálculo de limites pode ser usado para entender melhor o comportamento assintótico de uma função. Por "comportamento assintótico", queremos dizer o que acontece com os valores de $f(x)$ quando x começa a assumir "valores muito grandes".

Exemplo 8.13. Para tentar criar uma intuição sobre essa coisa de comportamento assintótico, acho útil ter em mente dois modelos famosos de crescimento populacional. Um é o modelo de Malthus.

Neste modelo, se P_0 é o número de indivíduos iniciais da população e $P(t)$ é a população num instante t (t pode ser medido em anos, por exemplo), então a função $P(t)$ é dada por $P(t) = P_0e^{kt}$ onde $k > 0$ é uma constante que depende da população. A premissa básica do modelo de crescimento populacional de Malthus é que a população cresce numa taxa proporcional à população naquele instante: "quanto mais gente, mais gente."

Você pode utilizar o modelo de Malthus para pequenas populações num intervalo de tempo mediano ou para grandes populações num intervalo pequeno de tempo, pois ele implica que a população vai aumentar indefinidamente. Isto certamente não é verdade, considerando questões como limitação do espaço físico e disponibilidade de alimentos. No entanto, se você tabular a população brasileira no século XX, de 1900 a 2000, vai ver que o modelo malthusiano funciona bem (com $k \approx 0,023$).

Para tentar resolver o problema do crescimento ilimitado no modelo de Malthus, o matemático Verhulst criou um novo modelo de crescimento populacional, introduzindo alguns limitantes ao crescimento. Os detalhes sobre como criar este novo modelo matemático fogem do escopo deste curso, mas talvez você aprenda sobre isso em Cálculo 3 (ambos os modelos são construídos com base em equações diferenciais). Em todo caso, a função que Verhulst chegou foi

$$Q(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}},$$

em que a, b são constantes positivas que dependem de características da população e do meio ambiente, e P_0 é a população inicial.

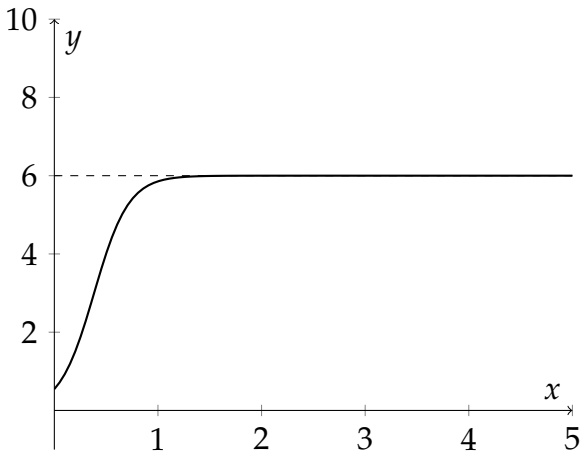


Figura: Gráfico do modelo de Verhulst.

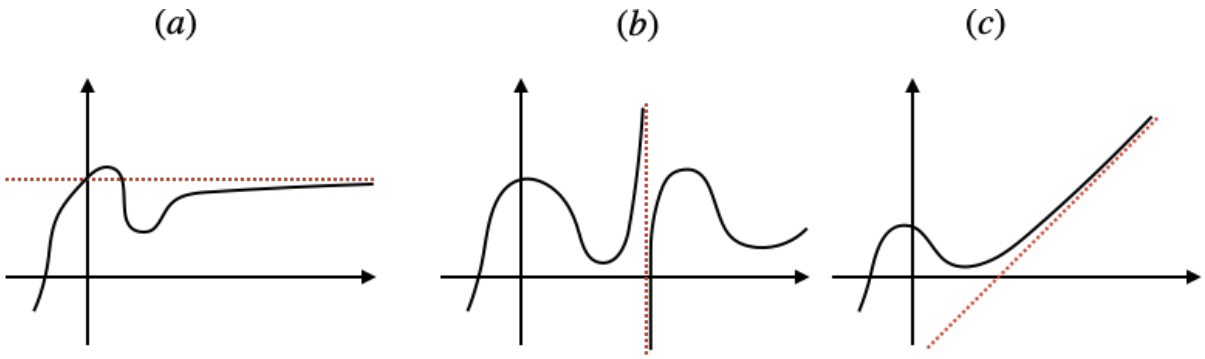
Neste caso, a população não cresce mais indefinidamente: o comportamento assintótico é chegar até um limite, que é algo mais próximo do real.

Por exemplo, se você já fez massa de pizza, deve ter percebido que o fermento biológico seco, quando colocado em água morna com um pouco de açúcar, não cresce indefinidamente: após algum tempo ele adquire uma consistência esponjosa e fica estável. Neste aspecto, o crescimento da população humana se comporta de forma parecida com o Saccharomyces cerevisiae meyen.

◁

Exemplo 8.14. Outro exemplo interessante é o do lucro na venda de um certo produto. Em termos assintóticos, o lucro de uma empresa está limitado pela sua capacidade de produção e venda. Suponha que você tem uma empresa que fabrica e vende bolos de cenoura. Se o lucro em cada bolo vendido é de R$ 10,00, e você recebe uma encomenda de 5 milhões de bolos, não terá um lucro de 50 milhões de reais, pois dificilmente terá capacidade de produção para tantos bolos. Investimentos terão que ser feitos, tanto em logística e transporte como em armazenamento, ou mesmo para conseguir um capital inicial para a produção e contratação de pessoal. Livros de matemática, com alguma frequência apresentam funções lineares que descrevem lucros, o que não é nada realista em termos de comportamento assintótico.
◁

Diremos que uma reta r é uma assíntota do gráfico de $f(x)$ quando o gráfico de $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de r a medida que $x \to \infty$ (casos (a) e (c)) ou $x \to p$ (caso (b)). Isto pode acontecer, basicamente, de três formas "distintas":



(a) se aproximando de uma reta horizontal, (b) se aproximando de uma reta vertical ou (c) se aproximando de uma reta inclinada (oblíqua)

Na próxima aula, veremos como detectar cada um destes fenômenos em termos matemáticos.

9 Assíntotas

9.1 Assíntotas

Diremos que uma reta r é uma assíntota do gráfico de $f(x)$ quando o gráfico de $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de r a medida que $x \to \infty$ ou $x \to p$. Isto pode acontecer, basicamente, de três formas "distintas":

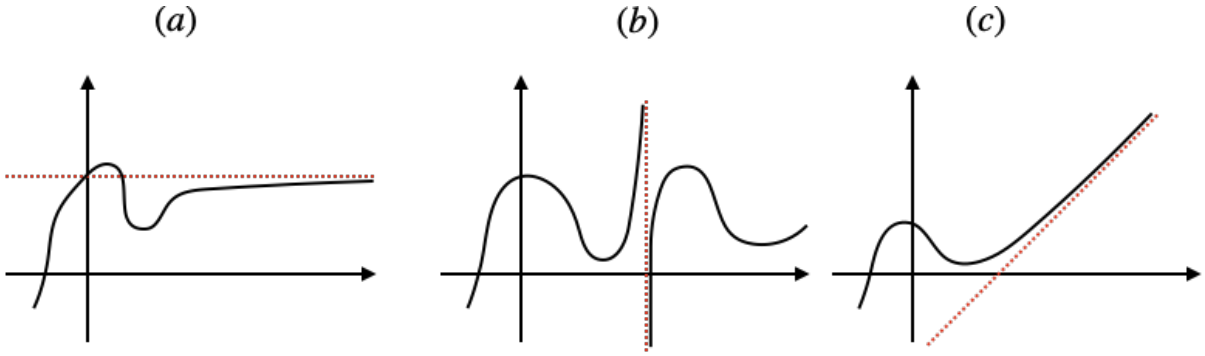


Figura 2: (a) se aproximando de uma reta horizontal, (b) se aproximando de uma reta vertical ou (c) se aproximando de uma reta inclinada (oblíqua).

Na Figura 2:

(a) a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.

(b) a reta $x = p$ é uma assíntota vertical: $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty$.

(c) a reta $y = mx + n$ é uma assíntota oblíqua/inclinada: $\lim_{x\to\infty} \Big(f(x) - [mx + n] \Big) = 0$.

Observação 9.1. É um erro comum achar que o gráfico da função não pode cortar a assíntota. Por exemplo, a reta $y = 0$ é assíntota horizontal de $y = \cos(x)/e^x$, mesmo a cortando um número infinito de vezes.

Guia rápido para assíntotas

a) Assíntotas horizontais são fáceis de descobrir: basta calcular $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

b) Onde procurar assíntotas verticais? Um bom lugar é nos valores de x que causam "problemas" no domínio da função (pontos de descontinuidade)!

c) E as assíntotas inclinadas? Suponha que a reta $y = mx + n$ seja uma assíntota para a função $y = f(x)$. Isto significa que, para valores muito grandes de x, temos que $f(x) \approx mx + n$. Logo, $f(x) - (mx + n)$ deveria ser próximo de zero, quando $x \to \infty$. Dividindo por x, temos que, quando $x \to \infty$,

$$\frac{f(x)}{x} \approx \frac{mx+n}{x} = m + \frac{n}{x}$$

Logo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(m + \frac{n}{x}\right) = m$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} ([f(x) - (mx+n)] + n) = n,$$

pois o limite considerando somente o termo que está entre colchetes é zero (já que $mx + n$ é assíntota).

Assim, para decidirmos se $y = f(x)$ tem uma assíntota da forma $y = mx + n$ (o que inclui assíntotas horizontais e inclinadas), primeiro calculamos o limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se ele der zero, o gráfico terá uma assíntota horizontal. Se der um número real m diferente de zero, então o gráfico terá uma assíntota inclinada. Daí, calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx).$$

Este limite vai resultar num número n, e a reta assíntota será $y = mx + n$.

Exemplo 9.2. Calcule as assíntotas de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2}.$$

◁

Exemplo 9.3 (P1 1s2020)**.** Calcule

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3 - 2x + 1}{5x^3 + 3x^2 - 7}.$$

◁

Exemplo 9.4 (P1 1s2020)**.** Calcule

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}.$$

◁

Exemplo 9.5 (P1 1s2020)**.** Calcule

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

◁

Exemplo 9.6 (Exame 1s2020)**.** Calcule

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}.$$

◁

Exemplo 9.7. Calcule

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}.$$

◁

Exemplo 9.8 (Exame 1s2020)**.** Calcule

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}}.$$

◁

Exemplo 9.9. Considere a função $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

a) Você acha que o gráfico de $y = g(x)$ tem assíntotas? Você deve estar pensando: "Ué, a função não é racional, como ela teria assíntotas?"

b) Vá no `WolframAlpha.com` e faça um gráfico desta função.

c) Agora calcule a(s) assíntota(s)!

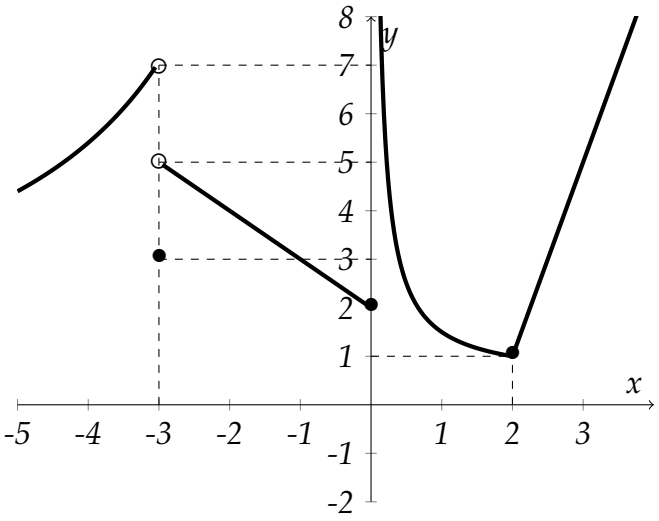
◁

Exercício 9.10. *Construa mais exemplos de funções com assíntotas (dois exemplos para cada tipo).*

10 Teorema do Sanduíche e Teoremas de Bolzano, Cauchy e Weierstrass

Revisão da aula anterior.

Exercício 10.1 (Kahoot)**.** *Considere a função $y = f(x)$ que tem o seguinte gráfico:*



Calcule:

1. $\lim_{x \to -3^-} f(x) = ?$
2. $\lim_{x \to -3^+} f(x) = ?$
3. $f(-3) = ?$
4. $\lim_{x \to -3} f(x) = ?$
5. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = ?$
6. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = ?$
7. $f(0) = ?$
8. $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$
9. $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$
10. *Em quais pontos a função não é contínua?*

10.1 Teorema do Sanduíche

Pense um pouco sobre o seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} x \sin(1/x).$$

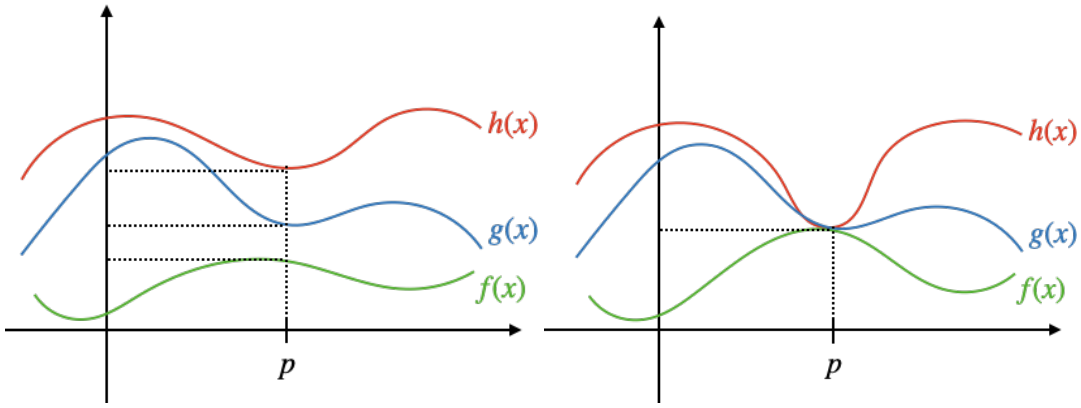
Com o conhecimento que temos até agora, não é muito fácil calcular este limite. Nesta seção, veremos um teorema que nos ajuda bastante no cálculo de limites de funções como a anterior.

Teorema 10.2 (Teorema do Sanduíche, ou "do Confronto"). *Seja $r > 0$ e considere $f(x), g(x), h(x)$ três funções tais que para todo x com $|x - p| < r$ (ou seja, se x está próximo de p), então $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Então*

$$\lim_{x\to p} f(x) \leq \lim_{x\to p} g(x) \leq \lim_{x\to p} h(x).$$

Em particular, se $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = L$, então

$$\lim_{x\to p} g(x) = L.$$



Exemplo 10.3. Como podemos calcular o limite

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x)?$$

Uma possibilidade é a seguinte. Lembre-se que a função seno é limitada entre -1 e 1, ou seja, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$-1 \leq \operatorname{sen}(t) \leq 1.$$

Isto é verdade, em particular, para números reais da forma $1/x$ (com $x \neq 0$). Portanto, temos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(1/x) \leq 1,$$

para todo $x \neq 0$. Multiplicando a inequação anterior por x, temos

$$-x \leq x\operatorname{sen}(1/x) \leq x.$$

O Teorema do Sanduíche nos diz que se calcularmos o limite em todas as expressões da desigualdade acima, a desigualdade se mantém:

$$\lim_{x\to 0} -x \leq \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}(1/x) \leq \lim_{x\to 0} x.$$

Como $\lim_{x\to 0} -x = 0$ e $\lim_{x\to 0} x = 0$, segue que

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x\text{sen}\,(1/x) \leq 0.$$

Portanto, o número $\lim_{x\to 0} x\text{sen}\,(1/x)$ é tal que é maior ou igual a zero e também menor ou igual a zero; logo, é zero:

$$\lim_{x\to 0} x\text{sen}\,(1/x) = 0.$$

◁

Exemplo 10.4. Vamos calcular o limite

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right).$$

Um truque muito útil é perceber o seguinte:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Além disso, $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$, portanto

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Daí, segue que

$$0 < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Agora, se calcularmos limite com $x \to \infty$ em todos os termos, chegaremos em

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0.$$

◁

Exemplo 10.5. Seja $f(x)$ uma função e suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq x^2.$$

Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$. Esta função é contínua na origem?

◁

Exemplo 10.6. Sejam $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$ para todo $x \in A$, M fixado. Mostre que $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

◁

Exercício 10.7. *Calcule* $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}$.

Observação 10.8. Você se lembra qual função é $\chi_{\mathbb{Q}}$?

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

10.2 Teoremas de Bolzano, Cauchy e Weierstrass

Os próximos dois teoremas nos ajudaram a decidir se uma equação $F(x) = 0$ tem ou não solução.

Teorema 10.9 (Bolzano-Cauchy ou "Anulamento")**.** *Se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a)$, $f(b)$ tem sinais contrários, então existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Exemplo 10.10. Mostre que a equação $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução real. ◁

Exemplo 10.11. Mostre que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ tem pelo menos três soluções reais. ◁

Podemos aplicar o Teorema 10.9 de uma forma bem interessante e obter mais propriedades da solução de uma equação $F(x) = 0$: é o que chamamos de **método da bisseção**.

A ideia é a seguinte: suponha que queremos resolver $F(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$. Testamos $F(a) < 0$ e $F(b) > 0$, então sabemos que existe alguma solução neste intervalo.

Seja c o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Se $F(c) = 0$, encontramos um valor que resolve a equação; já se $F(c) > 0$, restringimos F ao intervalo $[a, c]$, e daí temos que o Teorema de Bolzano-Cauchy pode ser aplicado neste intervalo, e acharemos um zero em $[a, c]$; se $F(c) < 0$, fazemos o mesmo com o intervalo $[c, b]$.

Agora podemos fazer o mesmo em um dos intervalos, $[a, c]$ ou $[c, b]$ e daí aos poucos estaremos procurando uma solução de $F(x) = 0$ num intervalo cada vez menor. Por exemplo, se soubermos que a solução está no intervalo $[1,11,\ \ 1,12]$, então com certeza ela será da forma $x = 1,11\ldots$, e teremos conseguido aproximá-la com 2 dígitos corretos.

É possível provar que, se quisermos um erro de no máximo ε na aproximação que queremos para a solução, então o número de subdivisões terá que ser pelo menos k, onde

$$k > \frac{\ln[(b-a)/\varepsilon]}{\ln(2)}.$$

Exemplo 10.12. Vamos fazer um exemplo. Seja $f(x) = x^5 - x^3 - 1$.

Note que

- $f(0) = -1 < 0$
- $f(1) = -1 < 0$
- $f(2) = 23 > 0$

Logo, existe uma solução no intervalo $[1, 2]$.

- $f(1,5) = 103/32 > 0$

Logo, o zero está em $[1,\ 1,5]$.

- $f(1,25) = 101/1024 > 0$

Logo, o zero está em $[1,\ 1,25]$.

- $f(1,125) = -20375/32768 < 0$

Logo, o zero está em $[1,125,\ 1,25]$.

- $f(1,1875) = -0,313169 < 0$

Logo, o zero está em $[1,1875,\ 1,25]$.

- $f(1,21875) = -0,121382 < 0$

Logo, o zero está em $[1,21875,\ 1,25]$.

Neste ponto, já sabemos que o primeiro dígito após a vírgula da solução é 2, ou seja, uma aproximação para a solução é $1,2\ldots$. Continuando o processo, encontraremos que uma aproximação melhor para a solução é

$$x \approx 1,236505703.$$

◁

Exemplo 10.13. Encontre uma solução para $x^7 - x^2 + x + 1 = 0$ no intervalo $[-1,1]$ com precisão de $1/5$, ou seja, encontre a tal que com certeza a solução da equação esteja num intervalo da forma $(a - 1/3, a + 1/3)$. ◁

Exemplo 10.14. Mostre que a equação $e^x + x - x^2 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-1,1]$ e calcule uma aproximação para esta solução da ordem de $3/10$, ou seja, encontre a tal que com certeza a solução da equação esteja num intervalo da forma $(a - 1/3, a + 1/3)$. ◁

Exercício 10.15. *Mostre que todo polinômio de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Podemos usar o Teorema de Bolzano-Cauchy para demonstrar um importante resultado:

Teorema 10.16 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Então f possui pelo menos um ponto fixo: ou seja, existe $a \in [0,1]$ tal que $f(a) = a$.*

Teoremas que garantem a existência de pontos fixos são muito importantes, tanto para a própria matemática quanto para ramos aplicados. Quando você fizer um curso de equações diferenciais (Cálculo 3, por exemplo), verá que o Teorema de Existência e Unicidade para Equações Diferenciais é demonstrado usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach.

O próximo resultado nos ajuda a resolver equações do tipo $F(x) = b$ no caso em que a função $F(x)$ está definida num intervalo compacto, e é uma pequena generalização do Teorema de Bolzano-Cauchy.

Teorema 10.17 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$ e d é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$.*

Exemplo 10.18. Seja $p(x) = x^9 - 4x^6 - 7x^3 - x^2 + 5$. Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $p(a) = 3$? ◁

Exemplo 10.19. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua, com

- $f(0) = 1$ e
- $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in [0,1]$.

Mostre que $f(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$.
◁

Um outro resultado que é muito útil ao trabalharmos com funções contínuas é o seguinte:

Teorema 10.20 (Teorema de Weierstrass)**.** *Se f é contínua em $[a,b]$, então $f([a,b])$ também é um intervalo limitado e fechado, ou seja, existem $c, d \in [a,b]$ tais que $f([a,b]) = [f(c), f(d)]$.*

Uma outra forma de entender o enunciado do Teorema de Weierstrass é que uma função contínua definida num intervalo fechado e limitado sempre assume um maior valor e um menor valor neste intervalo; no enunciado anterior, $f(c)$ é o menor valor assumido pela função, e $f(d)$ é o maior. Além disso, note que a imagem do intervalo limitado e fechado é também um intervalo limitado e fechado.

Exemplo 10.21. Mostre que o conjunto

$$A = \left\{ x^2 + \frac{1}{x},\ \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}$$

admite um maior e um menor elemento. Você consegue calcular estes valores? ◁

Exemplo 10.22. O resultado do Teorema 10.20 pode não ser verdadeiro se a função não for contínua, ou se não estiver definida num intervalo fechado e limitado. Por exemplo, a imagem de $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1/x$ não tem um maior ou um menor elemento. ◁

10.3 Bônus: definição de limite para funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Vamos estudar um pouco as funções $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Essa funções são definidas pelos seus valores nos naturais: $a(1)$, $a(2)$, etc. Às vezes vamos usar a seguinte notação para representar essas funções: $a_n = a(n)$. Assim, usaremos a_1 para representar $a(1)$, a_2 para representar $a(2)$ e por aí vai. Estas funções recebem o nome especial de "sequências".

Observação 10.23. Como $a : N \to \mathbb{R}$, não existe $a(1/2)$, $a(7/8)$, etc, só podemos calcular a função a nos naturais.

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, diremos que **o limite de $f(n)$ quando n tende a infinito é igual a α** se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos $|f(n) - \alpha| < \varepsilon$. Neste caso **diremos que $f(n)$ converge para α**. A notação para isto será

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = \alpha$$

ou então

$$f(n) \to \alpha,$$

pois **no caso da variável ser natural, a única possibilidade é que $n \to \infty$.**

Exemplo 10.24. Se $f(n) = 1/n$, então $f(n) \to 0$. ◁

Exemplo 10.25. Se $a(n) = \dfrac{n+1}{2n+2}$ então $a(n) \to \dfrac{1}{2}$. ◁

Exemplo 10.26. A sequência $(-1)^n$ não converge. ◁

Teorema 10.27 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Se a_n é uma sequência monótona e limitada então ela converge.*

Exemplo 10.28. Seja

$$k(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

com $n \in \mathbb{N}$. Note que

- $k_1 = \left(1 + \dfrac{1}{1}\right)^1 = 2,$
- $k_2 = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 9/4 \approx 2,25,$
- $k_{10} = \left(1 + \dfrac{1}{10}\right)^{10} = 64/27 \approx 2,59,$
- $k_{1000} = \left(1 + \dfrac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2,71692,$
- $k_{1000000} = \left(1 + \dfrac{1}{1000000}\right)^{1000000} \approx 2,71828.$

Utilizando o Teorema 10.27, é possível demonstrar que a sequência $(k_n)_n$ converge. O limite desta sequência é um número real, que denotaremos por

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

◁

Observação 10.29. Uma pausa para uma discussão filosófica. O que acabamos de fazer foi dar nome (ou "atribuir um símbolo") a um número: o número resultado do limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

será chamado/denotado por "e". Isto não é diferente do que fazemos quando denotamos por "2" o número dois, ou de quando denotamos por "$\sqrt{3}$" a única solução positiva da equação $x^2 - 3 = 0$, ou quando chamamos de π o número que obtemos se dividirmos o comprimento C de uma circunferência qualquer pela medida do seu diâmetro.

10.3.1 A função exponencial

O número e definido na seção anterior será usado para definir a função exponencial de base e, ou seja, $f(x) = e^x$. A função $f(x) = e^x$ às vezes será denotada por $\exp(x)$.

Outra forma de definir esta função é

$$f(x) = e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Note que agora podemos calcular e^x para qualquer valor de x: por exemplo, $e^1 = e$ e $e^0 = 1$. Para calcular e^2, basta calcular o limite

$$e^2 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

Além disto, $f(x) > 0$ para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Esta função é invertível, e sua inversa será denotada por

$$\ln(x) = \log_e(x).$$

Exercício 10.30. *Considere a função*

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & , \quad x \leq -1, \\ 2ax^2 & , \quad -1 < x < 1, \\ b + \ln(x) & , \quad x > 1. \end{cases}$$

Determine, se existirem, valores de a, b para os quais a função é contínua.

Exercício 10.31. *Calcule os limites abaixo (deixe as contas).*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x^2 + 9}{2 + x + x^2 - x^3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5 + x^2 + x + 1}{2x^5 + 7}$

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t + 1}{t^3 + 2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

Exercício 10.32. *Sejam $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas e defina*

$$k(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in \mathbb{Q}, \\ g(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Seja $S = \{x \in A;\ f(x) = g(x)\}$. Mostre que a função $k(x)$ é contínua em todos os pontos de S.

Exemplo 10.33. Mostre que $k(x) = x^2\chi_{\mathbb{Q}}$ é contínua em $x = 0$. ◁

Exercício 10.34. *Mostre que a função*

$$k(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x \in \mathbb{Q}, \\ x+1 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

é contínua em apenas dois pontos.

Exemplo 10.35. Em que pontos a função abaixo é contínua?

$$k(x) = \begin{cases} \cos(x) & , \quad x \in \mathbb{Q}, \\ \operatorname{sen}(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

◁

Exercício 10.36. *Calcule os limites*

- $\lim_{x\to 0} x^4 \operatorname{sin}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$
- $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$

Exercício 10.37. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 1, \\ 2x, & , \quad x < 1. \end{cases}$$

- *A função é contínua em* $x = 1$*?*
- *Existe* $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$*?*

Exercício 10.38. *Estude as assíntotas de* $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$.

Exercício 10.39. *Estude as assíntotas de*

$$g(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-6x+5}$$

e esboce seu gráfico.

10.3.2 e^x e os juros (ou: forma alternativa de definir e)

Referência sugerida: Eli Maor, *e*: the story of a number, Princeton University Press, 1994

Juros compostos

- Comece com M reais.
- Aplique este dinheiro a r % de juros anuais.
- No final do primeiro ano, você terá $M(1+r)$ reais.
- No final do segundo ano, você terá $M(1+r)(1+r) = M(1+r)^2$ reais.

- No final de t anos, você terá $M(1+r)^t$ reais.

Problema: o que acontece se você precisar o dinheiro antes de um ano? Precisamos calcular os juros em períodos menores. É aqui que seu banco fica rico e você pobre.

Exemplo 10.40. Considere R$ $100,00$ investidos a uma taxa de 6% ao ano.

- taxa anual: ao final de um ano, você terá R$ $106,00$.
- taxa semestral de $3,0\%$:
  - final do primeiro semestre: R$ $103,00$
  - final do segundo semestre: R$ $106,09$
- taxa bimestral de $1,0\%$:
  - final do primeiro bimestre: R$ $101,00$
  - final do segundo bimestre: R$ $102,01$
  - final do terceiro bimestre: R$ $103,0301$
  - final do quarto bimestre: R$ $104,060401$
  - final do quinto bimestre: R$ $105,10100501$
  - final do sexto bimestre: R$ $106,1520150601$

◁

Se a taxa anual de r % for decomposta n vezes ao ano, então o montante inicial M se tornará

$$S = M\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt},$$

onde t é medido na menor unidade (t semestres, ou t bimestres, etc). Se $n = 1$, voltamos à fórmula inicial.

Considere agora $r = 1$ (taxa de 100 %) e $t = 1$. Se $n = 1$, ou seja, se o taxa for aplicada só no final do ano, o capital irá dobrar (esperado, concorda?). Se a taxa for aplicada em períodos menores, é esperado que o capital mais que dobre. Qual seria a maior variação possível do capital? Ou seja: se calcularmos

$$S(n) = M\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

para valores muito grandes de n (ou seja, calculando os juros em períodos cada vez menores), onde chegamos? Certamente passamos de $2M$, mas será que chegamos a $3M$?

Não! Coloque $M = 1$ para simplificar.

- $S(n) < S(n+1)$ para todo $n \geq 1$ (use binomial)
- $S(n) < 3$ (é limitada)
- Logo $\lim_{n\to\infty} S(n)$ existe e é um número real, que denotamos por e e cuja aproximação é

$$e \approx 2,71828182845904523536028747135...$$

11 Limites fundamentais

Revisão da aula anterior.

Exemplo 11.1 (O truque do logaritmo)**.** Seja $y = f(x)^{g(x)}$. Calcule $\lim_{x\to\infty} y$. ◁

Solução. *Seja* $y = f(x)^{g(x)}$. *Então* $\ln(y) = g(x)\ln(f(x))$. *Portanto*

$$\lim_{x\to\infty} \ln(y) = \lim_{x\to\infty} g(x)\ln(f(x))$$

e daí

$$\ln(\lim_{x\to\infty} y) = \lim_{x\to\infty} g(x)\ln(f(x)),$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} y = \exp\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\ln(f(x))\right).$$

□

11.1 Limites fundamentais

Em breve definiremos o que é a derivada de uma função $f(x)$ no ponto $x = a$, e teremos que calcular limites como

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2}$$

Quando o limite acima existir, ele será chamado de derivada da função $f(x)$ no ponto $x = 0$.

Exemplo 11.2. Ao calcularmos o limite (2) com a função $g(x) = \text{sen}(x)$ no ponto $x = 0$, o limite fica

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Como calcular este limite? Este cálculo faz algum sentido? Será que a função sen $(x)/x$ tem um bom comportamento quando $x \to 0$? É possível provar que existe $r > 0$ tal que

$$0 < \text{sen}(x) < x < \text{tg}(x)$$

para todo $0 < x < r$. Dividindo por $\text{sen}(x)$ obtemos

$$1 < \frac{x}{\text{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)},$$

logo se $0 < x < r$ teremos

$$\cos(x) < \frac{\text{sen}(x)}{x} < 1.$$

Por outro lado, se $-r < x < 0$ então $0 < -x < r$ e

$$\cos(-x) < \frac{\text{sen}(x)\cdot(-x)}{(-x)} < 1.$$

Como $\cos(-x) = \cos(x)$ e $\dfrac{\text{sen}(-x)}{(-x)} = \dfrac{\text{sen}(x)}{(x)}$ segue que $-r < x < 0$ implica

$$\cos(x) < \frac{\text{sen}(x)}{x} < 1.$$

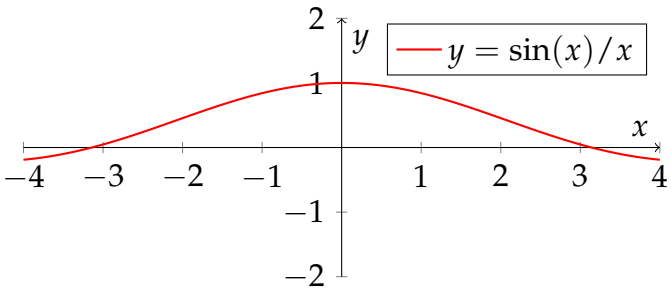
Logo, para todo x com $0 < |x| < r$ teremos $\cos(x) < \dfrac{\text{sen}(x)}{x} < 1$. Como

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1, \ \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

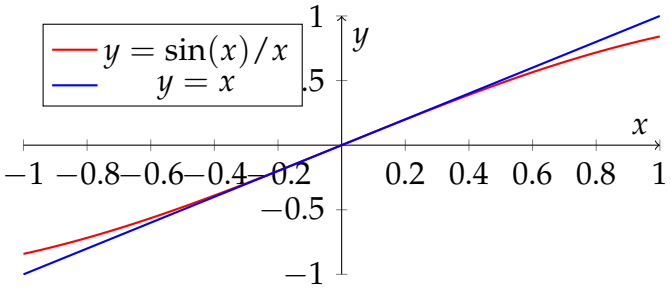
segue do Teorema do Sanduíche que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

Ou seja: as funções sen (x) e $h(x) = x$, para x bem pequeno, são praticamente iguais. Veja isto no gráfico abaixo:



Outra maneira de perceber que de fato o limite de $\sin(x)/x$ com $x \to 0$ é 1 é analisar separamente os gráficos de $y = \sin(x)$ e $y = x$ e perceber que, perto de $x = 0$, os gráficos são muito parecidos, ou seja, o quociente $\sin(x)/x$ é 1. Veja no gráfico abaixo:



◁

Existe ainda uma terceira forma de confirmar este limite, que veremos mais pra frente no curso, que é usando séries de Taylor, ou polinômios de Taylor.

Físicos também costumam ter uma boa demonstração, que você vai se lembrar caso tenha estudado sobre movimento harmônico simples (o pêndulo sem atrito): o caso mais simples é quando o pêndulo é colocado em movimento a partir de um deslocamento de um pequeno ângulo θ, e daí para que a equação que determina o movimento possa ser deduzida de forma elementar, é assumido que sen $(\theta) \approx \theta$. Logo, sen $(\theta)/\theta \approx 1$. Espertos estes físicos, né?

Teorema 11.3. *Vamos assumir como verdadeiros os limites:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln(a)$

Estes limites são chamados de "limites fundamentais".

Observação 11.4. É bom ressaltar que não há nada de "fundamental" nos limites do Teorema 11.3: só estamos mesmo assumindo que estes limites funcionam pela importância que eles tem no que segue. A demonstração do Teorema 11.3 pode ser feita por ε's e δ's ou então utilizando o Teorema de L'Hopital, que veremos em algumas semanas.

Exemplo 11.5. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$. ◁

Solução. *Uma possibilidade de calcular o limite acima, que no cálculo direto resulta em "$0/0$" (muitas aspas!), é realizar uma mudança de variáveis. Vamos fazer desta forma para ilustrar o método, que pode ser usado em muitos outros casos.*

Se fosse

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x},$$

saberíamos o que fazer: este é um dos nossos limites fundamentais, e resulta em 1*. Só que a função seno não está calculada em* x*, e sim em* $5x$*. Vamos então introduzir a variável* u*, com* $u = 5x$*. Note que, na medida que* $x \to 0$*, também ocorre* $u \to 0$*. Trocando, na função,* u *por* $5x$*, temos*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{(u/5)} = \lim_{u\to 0} 5\cdot \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 5\cdot \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 5\cdot 1 = 5.$$

Outra forma de calcular este limite, sem ter que começar fazendo o procedimento da mudança de variáveis, é multiplicar e dividir a função por 5*:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}\cdot \frac{5}{5}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}\cdot 5\right) = 5\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}.$$

Note que temos o limite com $x \to 0$ *de seno calculado numa função que tende a zero, dividido pela mesma função. Agora podemos usar a mudança de variáveis* $u = 5x$ *e ficar com*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = 5\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = 5\cdot \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 5.$$

□

Observação 11.6. Leia esta observação com muito cuidado, pois ela contém uma solução errada, mas muito comum, do limite acima. Partindo da expressão

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x},$$

um estudante pode, de forma despercebida, resolver "tirar" o 5 do argumento da função seno, escrevendo algo como

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\operatorname{sen}(x)}{x} = 5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 5,$$

onde no último passo foi usado o limite fundamental que aprendemos. Este procedimento é errado: a função seno não é linear, então $\operatorname{sen}(kx)$ não é o mesmo que $k\operatorname{sen}(x)$. Note que, mesmo assim, a resposta é a mesma da solução correta. Essa coincidência numérica da resposta é irrelevante, pois a solução está errada.

Exemplo 11.7. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$. ◁

Solução. *Temos:*

- *Indeterminação do tipo* $0/0$.
- *Abrir* $\tan(3x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$ *não parece ajudar..*
- *Note que* $\dfrac{\tan(3x)}{\tan(5x)} = \dfrac{\tan(3x)}{\tan(5x)}\dfrac{3x}{3x}\dfrac{5x}{5x} = \dfrac{\tan(3x)}{3x}\dfrac{5x}{\tan(5x)}\dfrac{3x}{5x}$.
- *Note que* $\dfrac{\tan(kx)}{kx} = \dfrac{\sin(kx)}{kx}\dfrac{1}{\cos(kx)} \to 1$ *se* $x \to 0$.
- *Logo* $\dfrac{\tan(3x)}{3x}\dfrac{5x}{\tan(5x)}\dfrac{3x}{5x} \to \dfrac{3}{5}$ *se* $x \to 0$

□

Exemplo 11.8. Calcule $\lim_{x\to 0} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$. ◁

Solução. *Temos:*

- *A função seno é limitada e* $x^4 \to 0$.
- *Logo, este limite é igual a zero.*

□

Exemplo 11.9. Calcule $\lim_{x\to \infty} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$. ◁

Solução. *Temos:*

- *Note que* $x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right)}{1/x^4}$.

- *Se* $x \to \infty$ *então* $1/x^4 \to 0$. *Logo* $\lim_{x\to\infty} x^4 \sin\left(\dfrac{1}{x^4}\right) = 1$.

□

12 Exercícios: parte I

Exercício 12.1. *Calcule* $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$.

Solução. *Temos:*

- *Este limite "tem cara"de que precisa ser racionalizado.*
- *Primeiro lembrete:* $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$.
- *Portanto* $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a}) = x-a$.
- *Segundo lembrete:* $u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+uv+v^2)$.
- *Portanto* $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})([\sqrt[3]{x}]^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+[\sqrt[3]{a}]^2) = x-a$

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \cdot \frac{[\sqrt[3]{x}]^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+[\sqrt[3]{a}]^2}{[\sqrt[3]{x}]^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+[\sqrt[3]{a}]^2} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}]^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+[\sqrt[3]{a}]^2}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})([\sqrt[3]{x}]^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+[\sqrt[3]{a}]^2)} \\
&= \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \cdot \frac{[\sqrt[3]{x}]^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+[\sqrt[3]{a}]^2}{x-a} \\
&= \frac{[\sqrt[3]{x}]^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+[\sqrt[3]{a}]^2}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \to \frac{3\sqrt[3]{a}}{2\sqrt{a}} \text{ se } x \to a.
\end{aligned}$$

□

Exercício 12.2. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \quad x \geq 1, \\ 2x, & , \quad x < 1. \end{cases}$$

a) A função é contínua em $x = 1$*?*

b) Existe $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$*?*

Solução. *Temos:*

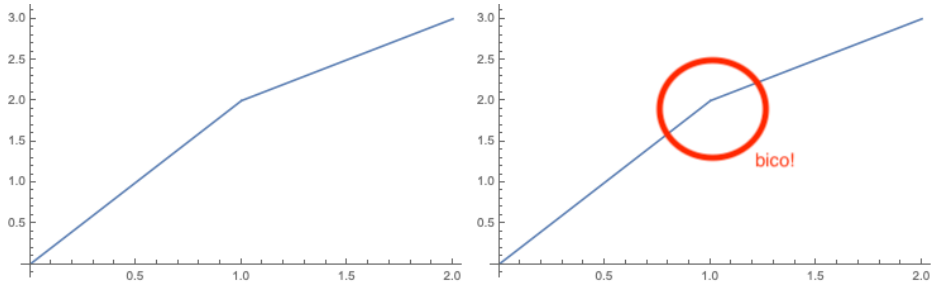
a) Como
∘ $f(1) = 1+1 = 2$,
∘ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ *e*
∘ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2$,
a função é contínua.

b) Precisamos calcular os limites laterais. Note que $f(1) = 2$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2(x-1)}{x-1} = 2$

- $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{(x+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$

Logo o limite indicado não existe.



□

Exercício 12.3. *Estude as assíntotas de* $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

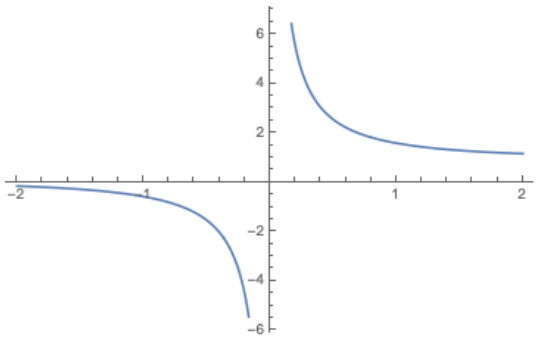
Solução. *Temos:*
Procurando assíntotas horizontais*:*

- *se* $x \to \infty$ *então teremos "*∞/∞*".*
- $\dfrac{e^x}{e^x-1} = \dfrac{e^x}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)} \to 1$ *se* $x \to \infty$.
- *logo* $y = 1$ *é uma assíntota horizontal!*
- *Já quando* $x \to -\infty$*, como* $e^x \to 0$*, teremos algo do tipo "*$0/(1+0)$*", que resulta em* 0.
- *Logo* $y = 0$ *também é uma assíntota horizontal.*

Procurando assíntotas verticais*:*

- *existe algum problema no domínio da função?*
- *sim! quando* $e^x - 1 = 0$ *o denominador se anula*
- *ou seja: temos um problema em* $x = 0$.
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{e^x}^{\to 1}}{\cancel{e^x-1}^{\to 0^-}} \to -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{e^x}^{\to 1}}{\cancel{e^x-1}^{\to 0^+}} \to +\infty$

Logo $x = 0$ *é uma assíntota vertical!*



□

Exercício 12.4. *Estude as assíntotas de*

$$g(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5}$$

e esboce seu gráfico.

Solução. • *Fatorando os polinômios envolvidos:*

- $x^2 - 5x = x(x-5)$
- $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$
- *Logo* $\dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{x(x-5)}{(x-1)(x-5)}$

Assíntotas horizontais

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(x-5)}{(x-1)(x-5)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x(x-5)}}{(x-1)\cancel{(x-5)}} = 1$

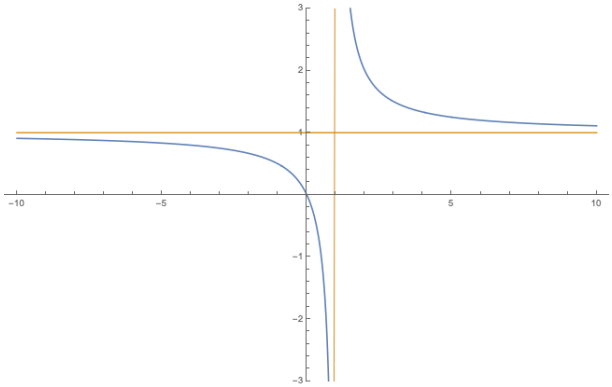
Candidatos a assíntotas verticais: $x = 1$, $x = 5$

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cancel{x}^{1}\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-1)}^{0^-}\cancel{(x-5)}} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{x}^{1}\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-1)}^{0^+}\cancel{(x-5)}} = \infty$

Candidatos a assíntotas verticais: $x = 1$, $x = 5$

- $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{\cancel{x}^{5}\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-1)}^{4}\cancel{(x-5)}} = \dfrac{5}{4}$
- $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{\cancel{x}^{5}\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-1)}^{4}\cancel{(x-5)}} = \dfrac{5}{4}$

Conclusão: $x = 1$ *é assíntota,* $x = 5$ *não é.*



□

Exercício 12.5. *Resolva* $|6 - x| < 3x$ *e ilustre a solução.*

Exercício 12.6. *Mostre que a equação*

$$\tan(x) + 1 = 16x^2$$

tem pelo menos uma solução no intervalo $(-\pi/4, \pi/4)$*. Estime a solução com um erro de no máximo 0,5.*

Exercício 12.7. *Use o TVI para mostrar que a equação*

$$\operatorname{sin}(x) = 1 + x - x^2$$

possui pelo menos duas soluções.

Exercício 12.8. *Calcule* $\lim_{x\to 0} x^{20}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

Exercício 12.9. *Calcule* $\lim_{x\to 2} \dfrac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

Exercício 12.10. *Ache k para que* $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{7x} = 42$.

Exercício 12.11. *Calcule* $\lim_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x+2}$.

Exercício 12.12. *Calcule* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$.

Exercício 12.13. *Calcule* $\lim_{x\to 0^+} x \operatorname{sin}^2(\ln(x))$.

Exercício 12.14. *Seja* $f(x)$ *uma função tal que para todo* $x \neq 0$ *temos*

$$\cos(x) - 1 \leq f(x) \leq x^4 + x^2.$$

Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$*. Mostre que se* f *for contínua então* $f(0) = 0$.

Exercício 12.15. *Calcule as assíntotas verticais e horizontais de*

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 - 1}.$$

Exercício 12.16. *Determine a, b para que a função*

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & , \quad x > 1, \\ x^2 - 4x + 1 & , \quad x < 1 \\ b & , \quad x = 1 \end{cases}$$

seja contínua.

13 Variações, aproximações lineares e derivadas

13.1 *Our friendly neighborhood*, a regra de três

Desde o momento em que nascemos, o primeiro momento realmente importante da nossa vida acontece quando aprendermos a usar a "regra de três". O segundo momento relevante da vida, apesar de ser um pouco frustrante, é justamente quando aprendemos que a regra de três não resolve todos os problemas de matemática e de física.

Vamos tentar explicar por quê nossa amiga "regra de três" não funciona sempre.

13.1.1 Variações

Suponha que duas grandezas x, y estão relacionadas por uma relação do tipo $y = mx + n$ (algo um pouco mais geral que nossa "regra de três").

Se x varia de x_1 para x_2, então y varia de

$$y_1 = mx_1 + n \text{ até } y_2 = mx_2 + n.$$

Denotando por Δx a variação de x e por Δy a variação de y, temos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(mx_2 + n) - (mx_1 + n)}{x_2 - x_1} = m.$$

Note que esse valor não depende de x_1 ou x_2:

$$\Delta y = m\Delta x$$

independente de quem seja x_1 ou x_2 (é constante!). Isso funciona basicamente por conta da dependência linear entre as grandezas. É assim que funciona a famosa "regra de três", e somente funciona neste caso (que, no exemplo acima, devemos ter $n = 0$ para funcionar).

Felizmente, ou infelizmente, na natureza muitas coisas não estão linearmente relacionadas. O que acontece neste caso?

Vamos a um exemplo bem simples, em que x, y estão relacionadas por uma equação do tipo $y = x^2$.

- se x varia de 1 para 2, y varia de 1 para 4: $\Delta y/\Delta x = 3$
- se x varia de 2 para 3, y varia de 4 para 9: $\Delta y/\Delta x = 5$
- se x varia de 3 para 4, y varia de 9 para 16: $\Delta y/\Delta x = 7$

Ou seja, neste caso a variação $\Delta y/\Delta x$ não é constante!
Vamos estudar melhor a variação perto de $x = 1$.

- x de 1 para 2: y de 1 para 4: $\Delta y/\Delta x = 3$
- x de 1 para 1,5: y de 1 para 2,25: $\Delta y/\Delta x = 2,5$
- x de 1 para 1,1: y de 1 para 1,21: $\Delta y/\Delta x = 2,1$
- x de 1 para 1,01: y de 1 para 1,0201: $\Delta y/\Delta x = 2,01$

Para pequenas variações de x perto de 1, a variação em y é de aproximadamente duas vezes a de x.

Vamos agora investigar como são as variações $\Delta y/\Delta x$ perto de $x = 2$.

- x de 2 para 3: y de 4 para 9: $\Delta y/\Delta x = 5$
- x de 2 para 2,5: y de 4 para 6,25: $\Delta y/\Delta x = 4,5$
- x de 2 para 2,1: y de 4 para 4,41: $\Delta y/\Delta x = 4,1$
- x de 2 para 2,01: y de 4 para 4,0401: $\Delta y/\Delta x = 4,01$

Para pequenas variações de x perto de 2, a variação em y é aproximadamente 4 vezes a de x.

A conclusão é que a relação $\Delta y/\Delta x$ muda conforme o ponto x_0. Isto é que impede a regra de três funcionar com relações não-lineares!

13.1.2 Aproximações lineares

Vamos tentar explicar a subseção anterior de uma outra forma: com aproximações. Considere a função $y = x^2$. Já aprendemos a calcular retas tangentes ao gráfico de uma função, e vimos que isto recai no cálculo de um limite.

Reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$: $y = ax + b$, com

$$a = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

e $b = 4 - 2 \cdot 4 = -4$, ou seja, $y = q(x) = 4x - 4$.

Reta tangente ao gráfico de $y = x^2$ no ponto $(5, 25)$: $y = ax + b$, com

$$a = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$$

e $b = 25 - 10 \cdot 5 = -25$, ou seja, $y = p(x) = 10x - 25$.

Na primeira aula, vimos que a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(p, f(p))$ é uma boa aproximação para $f(x)$ perto de $x = p$.

No nosso caso, $q(x)$ é uma boa aproximação para $f(x)$ desde que x esteja perto de 2, enquanto se quisermos uma boa aproximação para $f(x)$ para um valor de x perto de 5 então teremos que usar $p(x)$. E isto é muito importante: a função linear que usamos para aproximar $y = x^2$ varia conforme o valor que queremos aproximar.

- quanto é $f(2,1)$?
  - podemos calcular diretamente: $f(2,1) = (2,1)^2 = 4,41$
  - ou usar a aproximação linear $q(x)$ e calcular $q(2,1) = 4 \cdot 2,1 - 4 = 4,4$
  - o que não podemos: usar a aproximação $p(x)$, pois ela só vale pra x "perto" de 5
    - se tentarmos: $p(2,1) = -4$ (muito distante do valor real)
- quanto é $f(5,1)$?

- podemos calcular diretamente: $f(5,1) = (5,1)^2 = 26,01$
- ou usar a aproximação linear $p(x)$ e calcular $q(5,1) = 10 \cdot 5,1 - 25 = 26$
- o que não podemos: usar a aproximação $q(x)$, pois ela só vale pra x "perto" de 2
  * se tentarmos: $q(5,1) = 6,2$ (muito distante do valor real)

Ou seja, a escolha da função que será uma boa aproximação depende do valor onde queremos calcular a função. Isto não aconteceria se a função fosse linear!

13.2 Derivadas

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $p \in (a,b)$. Quando existir o limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

diremos que este limite é a derivada da função f no ponto $x = p$. Quando o limite existe, seu valor será denotado por $f'(p)$.

Se a função f tem derivada em p, dizemos que f é derivável (ou diferenciável) em $x = p$. Diremos que f é derivável (ou diferenciável) num conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se é derivável em todos os pontos de A.

Podemos apresentar o limite acima de outra forma. Considere uma mudança de variáveis $h = x - p$. Então, na medida que $x \to p$, temos que $h \to 0$. Substituindo no limite anterior, temos

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Esta última expressão às vezes é mais simples de manipular do que a anterior.

13.2.1 Retas tangentes

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que exista uma reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(p, f(p))$ e seja $y = mx + n$ a equação dessa reta.

Então

$$m = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$
$$n = f(p) - mp.$$

Observação 13.1. Já vimos quocientes como este algumas vezes no curso, em particular lá na primeira aula fizemos uma conta que recaia em calcular um limite deste tipo.

Observação 13.2. É preciso ter algum cuidado com a expressão "reta tangente", principalmente em termos do significado usual "é uma reta que somente intercepta o gráfico em um ponto". Na verdade, o objetivo de calcular uma reta tangente para $y = f(x)$ no ponto $x = a$ é, como já vimos algumas vezes neste curso, aproximar a função $f(x)$ por uma função linear $L(x)$ perto de $x = a$.

Suponha que $y = f(x)$ seja uma função derivável. Qual a equação da reta tangente que passa pelo ponto $(a, f(a))$?. É fácil deduzirmos o caso geral: a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(p, f(p))$ é dada por

$$y - f(p) = f'(p)(x - p).$$

Exemplo 13.3. Qual a reta tangente à reta $y = 3x + 7$ no ponto $(1, 10)$? ◁

Exemplo 13.4. Se $f(x) = x^2$, qual é o coeficiente angular da reta tangente no ponto $(3, 9)$? ◁

Exemplo 13.5. Mostre que se f é constante então $f'(x) = 0$ para todo x no domínio de f. ◁

Exemplo 13.6. Mostre que $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$. ◁

13.3 A derivada como uma função

Seja $f : A \subset \mathbb{R}$. Suponha que $f'(p)$ exista para todo $p \in A$. Isto nos permite definir a função derivada, $f' : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}.$$

Assim, construímos outra função, associada a $f(x)$: a derivada de $f(x)$, denotada por $f'(x)$.

Exemplo 13.7. Algumas derivadas:

- Se $f(x) = ax + b$ então $f'(x) = a$.
- Se $f(x) = x^2$ então $f'(x) = 2x$.
- Se $f(x) = |x|$ então

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < 0, \\ 1 & , \quad x > 0, \end{cases}$$

com f' definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

◁

Exemplo 13.8. Se $n \in \mathbb{Z}$ e $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$. ◁

Solução. *Seja $p \in \mathbb{R}$. Se $n > 0$ e $x \neq p$ temos*

$$\begin{aligned} \frac{x^n - p^n}{x - p} &= \frac{\cancel{(x-p)}\left(x^{n-1} + x^{n-2}p + \ldots + xp^{n-2} + p^{n-1}\right)}{\cancel{x-p}} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}p + \ldots + xp^{n-2} + p^{n-1}, \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{x \to p} \frac{x^n - p^n}{x - p} = \lim_{x \to p} \left(x^{n-1} + x^{n-2}p + \ldots + xp^{n-2} + p^{n-1}\right) = np^{n-1}$$

No caso $n < 0$, basta observar que a identidade

$$x^n - p^n = (x - p)\left(x^{n-1} + x^{n-2}p + \ldots + xp^{n-2} + p^{n-1}\right)$$

que utilizamos no caso anterior também vale agora. Portanto, concluímos que a derivada de $f(x) = x^n$ é

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

sempre que $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

□

Exemplo 13.9. Se $n \in \mathbb{N}$ e $f(x) = x^{1/n}$ então

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

(com $x > 0$ se n é par e $x \neq 0$ se x é ímpar). $\triangleleft$

Solução. *A conta é parecida com a anterior. Usando as mudanças de variáveis $u = x^{1/n}$ e $q = p^{1/n}$ podemos escrever*

$$\frac{x^{1/n} - p^{1/n}}{x - p} = \frac{u - q}{u^n - q^n} = \frac{1}{\dfrac{u^n - q^n}{u - q}}$$

Logo

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{x^{1/n} - p^{1/n}}{x - p} = \lim_{u \to q} \frac{1}{\dfrac{u^n - q^n}{u - q}} = \frac{1}{nq^{n-1}} = \frac{1}{n} p^{\frac{1}{n}-1}.$$

$\square$

Teorema 13.10. *Se f, g são diferenciáveis em p e k é uma constante, então $f + g$ e kf são deriváveis em p. Além disto:*

(i) $(kf)'(p) = kf'(p)$

(ii) $(f + g)'(p) = f'(p) + g'(p)$

Exemplo 13.11. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é um polinômio então

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

$\triangleleft$

Exemplo 13.12. Calcule o que se pede:

- $f'(x)$ com $f(x) = x^4 + 3x$
- $g'(2)$ com $g(x) = x^{-3} + x$
- $h'(x)$ com $h(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x}$

$\triangleleft$

Teorema 13.13. *Se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} &= \lim_{x \to p} \frac{e^x - e^p}{x - p} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{p+h} - e^p}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} e^p \cdot \cancelto{1}{\frac{e^h - 1}{h}} \\
&= e^p \Rightarrow f'(x) = e^x
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 13.14. *Se f for diferenciável em $x = p$ então f será contínua em $x = p$.*

Demonstração. Se f é derivável em $x = p$ então existe o limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

e ele vale $f'(p)$. Provar que f é contínua em p é o mesmo que provar que

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p),$$

ou ainda provar que

$$\lim_{x \to p} \Big(f(x) - f(p) \Big) = 0.$$

Note que

$$f(x) - f(p) = \Big(f(x) - f(p) \Big) \cdot \frac{x - p}{x - p} = \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p)$$

Logo

$$\lim_{x \to p} \Big(f(x) - f(p) \Big) = \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right) = 0$$

($\frac{f(x) - f(p)}{x - p} \to f'(p)$, $(x - p) \to 0$)

e daí f é contínua em $x = p$. □

O mesmo enunciado, reescrito numa forma que nos será mais útil na vida, é o seguinte:

Teorema 13.15. *Se f não for contínua em $x = p$ então f não será diferenciável em $x = p$.*

O teorema acima nos dá um bom teste de diferenciabilidade: se a função não for derivável num ponto, não será contínua ali.

Exemplo 13.16. Calcule $k'(x)$ onde for possível e verifique se existe $k'(1)$, onde

$$k(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 1, \\ -x + 2 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

A função é contínua em $x = 1$? ◁

Vamos a uma derivada com um grau de dificuldade um pouco maior (pelo menos neste ponto do curso):

Exercício 13.17. *Se $f(x) = x^2 e^x$, calcule $f'(x)$.*

14 Derivadas de produtos, quocientes e derivadas de ordem superior

14.1 Derivadas de algumas funções "importantes"

Exercício 14.1 (aula passada)**.** *Se $f(x) = x^2 e^x$, calcule $f'(x)$.*

Teorema 14.2. *Se $g(x) = \ln(x)$ então $g'(x) = 1/x$ $(x > 0)$*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p} \frac{\ln(x) - ln(p)}{x - p} &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(p+h) - \ln(p)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{p}\right) \\
&= \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{pu}} \\
&= \frac{1}{p} \lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{p} \qquad \ln(e) = 1
\end{aligned}$$

□

Teorema 14.3. *a.* $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$

b. $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

c. $\tan'(x) = \sec^2(x)$

d. $\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$

e. $\cot'(x) = -\csc^2(x)$

f. $\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x)$

Demonstração. a. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(x)\big(\cos(h) - 1\big) + \operatorname{sen}(h)\cos(x)}{h} \\
&= \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \cos(x)
\end{aligned}$$

Calculando limite com $h \to 0$ e aplicando os limites fundamentais, segue o resultado.

□

Observação 14.4. Sejam g, h funções diferenciáveis. Considere as funções

$$f(x) = g(x) \cdot h(x), \quad p(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Em geral não é verdade que $f'(x)$ seja igual a $g'(x)h'(x)$ e que $p'(x)$ seja igual a $\dfrac{g'(x)}{h'(x)}$. Não se pode derivar produtos e quocientes desta forma direta.

Exemplo 14.5. Se $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + x + 1$, calcule $f'(x)$. ◁

Exemplo 14.6. Se $g(x) = x^{-4} + 3x^2$, calcule $g'(x)$. ◁

Exemplo 14.7. Calcule a reta tangente ao gráfico de $y = x^2 + 1/x$ no ponto $(1, 2)$. Faça um esboço. ◁

Exemplo 14.8. Existe algum ponto do gráfico de $y = x^2 + x$ cuja reta tangente é paralela à reta $y = x + 1$? ◁

Exemplo 14.9. Verifique se a função

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , \quad x \leq 1, \\ -x + 3 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

tem derivada em $x = 1$. ◁

No exemplo anterior vimos um caso de função que é contínua, mas não era derivável. Isto pode acontecer. Se for derivável, porém, sempre será contínua. Veremos no final desta aula.

14.2 Regra do produto e do quociente

Teorema 14.10. *Sejam f, g funções diferenciáveis em $x = a$. Considere a função*

$$h(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Então h é diferenciável em $x = a$ e

$$h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &+ \frac{f(a)g(x) - f(a)g(x)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) \\ &+ f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \end{aligned}$$

Agora se calcularmos o limite com $x \to a$, teremos o resultado. □

Teorema 14.11. *Sejam f, g funções diferenciáveis em $x = a$, com $g(a) \neq 0$. Considere a função*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então h é diferenciável em $x = a$ e

$$h'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{f(x)g(a) + \Big(f(a)g(a) - f(a)g(a)\Big) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} \\
&= \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)g(x)g(a)} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(a) - g(a)}{(x-a)g(x)g(a)}
\end{aligned}$$

Agora se calcularmos o limite com $x \to a$, teremos o resultado. □

Exemplo 14.12. Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $r(x) = x^2 e^x$

e) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

f) $g(x) = e^x \cos(x)$

g) $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)\ln(x)}{x} \to$ qual a "derivada do numerador"?

h) $p(x) = x \log_3(x) \to$ lembrete: $\log_a b = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$

i) $q(x) = \sec(x)$

◁

14.3 Derivadas de ordem superior

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e suponha que $f'(x)$ exista para todo $x \in A$. Assim $f' : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, e podemos estudar se existe a derivada de $f'(x)$.

A existência de $(f')'(p)$ significa que existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Neste caso diremos que f é duas vezes derivável em $x = p$. Se a derivada segunda de f existir para todo $x \in A$, a função $f'' : A \to \mathbb{R}$ também denotada por $f^{(2)}(x)$.

Denotaremos por $f^{(k)}(x)$ a k-ésima derivada de f no ponto x. Se a função $f^{(k)}$ for contínua, diremos que f é de classe C^k.

Exercício 14.13. *Calcule as derivadas de ordem 1, 2 e 3 das funções abaixo.*

- $f(x) = x^3 - x^2$
- $g(t) = t\text{sen}\,(t)$
- $h(x) = e^x$

Observação 14.14. A notação para derivadas de ordem superior pode ser feita usando o $\prime$, por exemplo $f''(x)$, $f'''(x)$ e por aí vai. Mas fica difícil representar a 9-ésima derivada deste jeito, pois $f^{\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime\prime}(x)$ vai ser um pouco confuso.

Exemplo 14.15. Calcule a 2021-ésima derivada das funções:

- $f(x) = x^5 + x^4 - 3x + 2$
- $g(x) = xe^x$
- $h(x) = \text{sen}\,(x)$

◁

Exemplo 14.16. A função

$$g(x) = \begin{cases} x^2\text{sen}\,(1/x) & , \quad x \neq 0, \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

é de classe C^2? ◁

Suponha que f seja uma função que dependa de duas variáveis, $f(x, y)$, e estamos querendo estudar a variação de f conforme o valor de x varie.

Por exemplo, se $f(x, y)$ indica a temperatura num ponto (x, y) de uma placa, podemos querer estudar somente a variação da temperatura num segmento horizontal (variando somente x) ou num segmento vertical (variando somente y).

Problemas como este sempre recaem em derivar a função f, uma ou mais vezes, somente com respeito a uma das variáveis. Como iremos indicar isto?

Seja $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. A derivada de g com respeito à variável x, $g'(x)$, será indicada também por

$$\frac{d}{dx}g \text{ ou } \frac{dg}{dx} \text{ ou } \frac{d}{dx}g(x) \text{ ou } \frac{d\,g(x)}{dx}.$$

Esta notação tem algumas vantagens. A primeira delas é a representação das derivadas de ordem superior. A derivada segunda de g, que é a derivada da derivada, será denotada por

$$\frac{d}{(dx)}\frac{d}{(dx)}g(x) = \frac{d^2}{dx^2}g(x),$$

como se fosse (NÃO É!!!!) uma multiplicação dos símbolos $\frac{d}{dx}$.

A k-ésima derivada de g será denotada por $\frac{d^k}{(dx)^k}g(x)$.

Note que esta notação deixa claro qual variável está sendo derivada, ao contrário da notação $g'(x)$.

Assim, se $h(x,y)$ é uma função de duas variáveis, $\frac{d}{dx}h(x,y)$ indicará a derivada de h com respeito à variável x.

Exemplo 14.17. Seja $h(x,y) = yx^2$. Então $\frac{d}{dx}h(x,y) = 2yx$ e $\frac{d}{dy}h(x,y) = x^2$. ◁

Quando existem duas ou mais variáveis, a variável que não está sendo derivada deve ser tratada como uma constante numérica.

Exemplo 14.18. Calcule as derivadas $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ e $\frac{d}{dt}$ das funções a seguir.

- $f(x,y) = xe^y + \operatorname{sen}(x)$
- $g(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$
- $h(x,y,z) = x^2y^3z^7$
- $p(x) = e^x$
- $T(x,y,z,t) = e^x\cos(x)\sin(z)t$

◁

A fórmula da derivada do produto fica fácil de ser representada com a notação de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}fg = g\frac{d}{dx}f + f\frac{d}{dx}g.$$

A regra do quociente fica:

$$\frac{d}{dx}\frac{f}{g} = \frac{\frac{df}{dx}g - \frac{dg}{dx}f}{g^2}.$$

Exercício 14.19. *Qual a derivada de $g(x) = e^{x^2}$?*

15 A regra da cadeia e taxas relacionadas

15.1 Regra da cadeia

Já sabemos derivar e^x, mas ainda não sabemos derivar e^{x^2}. Vamos aprender!

Teorema 15.1. *Sejam $f : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ duas funções e suponha que g seja derivável em $x = a$ e f seja derivável em $g(a)$. Então a composição $f \circ g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em $x = a$ e*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Demonstração. Temos que

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Tomando limite, obtemos que este quociente é exatamente $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$, pois $x \to x_0$ implica $g(x) \to g(x_0)$.

Problema: estamos assumindo que $g(x) - g(x_0) \neq 0$ para valores de x próximos de x_0. Se $g(x) - g(x_0) = 0$ numa vizinhança de x_0 então teremos g constante perto de x_0, logo $g'(x_0) = 0$. Neste caso, a fórmula ainda será verdadeira e a prova ainda vale. □

Demonstração. (Prova, se dy/dx fosse uma fração - mas não é)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

□

Observação 15.2. Sem exagero, talvez esteja seja o resultado mais importante de toda essa primeira parte. Além disto, a partir de agora, você conhece basicamente todos os métodos de derivação que existem (a derivação implícita, que veremos em breve, não é exatamente uma técnica). Ou seja: você já tem as ferramentas necessárias para obter a expressão da derivada de qualquer função $f(x)$, dada explicitamente, sem envolver integrais, e que possa ser derivada.

Exemplo 15.3. Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $g(x) = \cos(e^x)$

c) $h(x) = \dfrac{x\text{sen}\,(e^x)}{\cos(x)}$

d) $p(x) = \dfrac{\cos(3x)}{x}$

◁

Solução. *a) Se $g(x) = e^x$ e $h(x) = x^2$, então $f(x) = g(h(x))$. Então $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$. Como $g'(x) = e^x$, então $g'(h(x)) = e^{x^2}$ e daí temos que $f'(x) = e^{x^2}2x$.*

b) $g'(x) = -\text{sen}\,(e^x)e^x$

c) (falta escrever)

d) (falta escrever)

□

Exemplo 15.4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável e $g(x) = f(x^2)$. Calcule $g''(2)$, sabendo que $f'(4) = 2$ e $f''(4) = 3$. ◁

Solução. *Note que* $g'(x) = 2xf'(x^2)$ *e* $g''(x) = 2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2)$. *Então*

$$g''(2) = 2f'(4) + 16f''(4) = 2 \cdot 2 + 16 \cdot 3 = 52.$$

□

Teorema 15.5 (Regra da cadeia, notação de Leibniz)**.** *Sejam* $y = f(x)$ *e* $x = g(t)$ *funções diferenciáveis com a imagem de* g *contida no domínio de* f. *Então*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

15.2 Taxas Relacionadas

Algumas vezes, a derivada de uma função estará relacionada com a de outra função. É o que chamamos de taxa (de variação) relacionada. Vamos a um exemplo.

Exemplo 15.6. Uma escada com 5 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada desliza afastando-se da parede a uma taxa de 1 m/s, quão rápido o topo da escada está escorregando para baixo na parede quando a base da escada está a 3 m da parede (medido no chão)? ◁

Solução. *Seja* $x(t)$ *a posição do pé da escada e* $y(t)$ *a posição do topo da escada, em que a variável* t *representa o tempo, e no instante* $t = 0$ *a escada está parada e começará a se movimentar.*

Como a escada tem 5m de comprimento, temos que $x(t)^2 + y(t)^2 = 5^2$, *e isto vale para todo* t, *pois a escada não muda de tamanho.*

A informação de que a "base da escada desliza afastando-se da parede a uma taxa de 1 m/s*" nos diz que* $x'(t) = 1$ *(para todo* t*).*

Queremos calcular $y'(t)$ *no instante do tempo em que a base da escada está a 3m da parede. Em quanto tempo isso acontece? Ora, se o afastamento é de 1m/s, isso acontece após 3s. Portanto, queremos calcular* $y'(3)$.

Se

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 25,$$

derivando temos

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$$

e como $x'(t) = 1$ *temos que*

$$2x(t) + 2y(t)y'(t) = 0.$$

Em $t = 3$*:*

$$2x(3) + 2y(3)y'(3) = 0,$$

o que nos dá

$$6 + 8y'(3) = 0.$$

Portanto, $y'(3) = -3/4 = -0,75m/s$.

□

Observação 15.7. Leia o livro do Stewart, seção 3.9.

Pela primeira vez, temos alguns exercícios de “modelagem matemática"no curso. Estes exercícios são “mais difíceis” que os do tipo “calcule isto", pois envolvem interpretação do problema, além de simplesmente algum cálculo mecânico. A única saída para aprender a resolver problemas deste tipo é a tentativa.

Outro problema clássico envolvendo taxas relacionadas é taxa de enchimento de tanques. Você precisa pesquisar sobre este problema e pensar um pouco sobre ele. Vamos resolvê-lo na próxima aula.

16 Derivação implícita

Exemplo 16.1. Seja $y = f(x) = x\cos(\pi e^{-x})$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $(0,0)$. ◁

Solução. *Temos que*

$$f'(x) = \cos(\pi e^{-x}) - x\text{sen}\,(\pi e^{-x})\pi e^{-x}(-1),$$

logo $f'(0) = -1$. *Também temos que* $f(0) = 0$. *Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *que passa por* $(0,0)$ *é* $y = -x$. □

Exemplo 16.2. Um balão esférico de borracha é enchido de gás a uma taxa de 5 m^3/min. Qual a taxa com a qual o raio do balão está aumentando quando $r = 3$ m? ◁

Exemplo 16.3. Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de 2 m^3/min, encontre a taxa na qual o nível da água está aumentando quando a água estiver com 3 m de profundidade. ◁

16.1 Derivação implícita

Como vimos no estudo de taxas relacionadas, às vezes não temos explicitamente a relação entre x e y, mas sim uma relação implícita. Por exemplo, suponha que sabe-se que y é função de x e que

$$\cos(xy(x)) + x^3 + y(x)^3 = 0.$$

Muitas vezes iremos omitir $y(x)$ e escrever só y:

$$\cos(xy) + x^3 + y^3 = 0,$$

o que só pode acontecer se estiver claro pelo contexto que existe a dependência de $y = y(x)$.

Note que nas equações acima não conseguimos isolar $y = y(x)$, mas talvez possamos calcular a derivada $y'(x)$. Este processo se chama derivação implícita.

Exemplo 16.4. Determine uma função $y = f(x)$ que satisfaça à relação $y^2 + xy = 1$. ◁

Solução. *Seja*

$$y(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+4} - x\right)}{2}.$$

Você pode fazer a conta e conferir que de fato temos $y(x)^2 + xy(x) = 1$. *Como eu achei esta expressão de* $y(x)$*? Usando a fórmula de Bháskara, considerando que a y fosse a variável. O detalhe é que existe outra expressão que também funciona:*

$$y(x) = \frac{\left(-\sqrt{x^2+4} - x\right)}{2},$$

e não é possível "isolar y" sem usar duas expressões. □

Exemplo 16.5. A função $y = f(x)$ é derivável e satisfaz à equação

$$xf(x) + \text{sen}\left(f(x)\right) = 4.$$

Calcule $f'(x)$. ◁

Solução. *Dica: use a regra do produto primeiro, e depois use a regra da cadeia nos termos que tem $f(x)$.* □

Exemplo 16.6. Seja $y = f(x)$ dada implicitamente por $y^3 + y = x$. Suponha que f seja derivável.

a) Calcule $f'(x)$.

b) Determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(10, f(10))$.

◁

Solução. *a) Derivando $y^3 + y = x$ com respeito a x, obtemos*

$$3y^2y' + y' = 1,$$

ou seja,

$$y' = f'(x) = \frac{1}{3y^2 + 1}.$$

b) Para a ret a tangente no ponto $(10, f(10))$, primeiro calculamos $f(10)$: substituindo $x = 10$ na equação, temos $y^3 + y = 10$, o que nos dá $y = f(10) = 2$. Portanto, queremos a reta tangente no ponto $(10, 2)$.

A inclinação da reta tangente será $f'(10)$, no caso em que $x = 10$ e $y = 2$. Usando a fórmula que descobrimos para $f'(x)$, segue que $f'(10) = 1/13$.

Assim, descobrimos que a equação da reta é da forma $y = x/13 + b$. Como a reta passa por $(10, 2)$, segue que $b = -4/3$ e daí a equação da reta procurada é

$$y = x/13 - 4/3.$$

□

Exemplo 16.7. A curva dada por $x^4 + y^4 = 1$ tem algum ponto em que a reta tangente tem inclinação -1? ◁

Solução. *Derivando a equação, obtemos*

$$4x^3 + 4y^3y' = 0,$$

ou seja,

$$y' = -\frac{x^3}{y^3}.$$

Portanto, a inclinação será -1 quando $x = y$. Substituindo esta relação na equação inicial, temos $2x^4 = 1$, ou $x = (1/2)^{1/4}$. Voltando na equação, chegamos em $y = 1/\sqrt{2}$. Portanto, a reta tangente ao gráfico da curva no ponto $((1/2)^{1/4}, (1/2)^{1/4})$ tem inclinação -1.

Existe outro ponto com reta propriedade? □

Exemplo 16.8. Se $f(x) = \arccos(x)$, calcule $f'(x)$. ◁

Solução. *Esta é uma das aplicações mais legais da derivação implícita: calcular derivadas de funções inversas. Se* $y = \arccos(x)$ *então* $\cos(y) = x$*. Derivando* y *com respeito a* x *temos*

$$-\operatorname{sen}(y)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(y)}.$$

Como $\cos^2(y) + \operatorname{sen}^2(y) = 1$ *segue que*

$$\operatorname{sen}(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$$

e daí

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

□

Teorema 16.9. *Seja* f *uma função invertível com inversa* g*. Se* f *for derivável em* $x = g(p)$ *e* $f'(g(p)) \neq 0$ *e* g *é contínua em* $x = p$ *então* g *será derivável em* p *e*

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))}.$$

Observação 16.10. Na notação de Leibniz, o resultado do Teorema 16.9 pode ser escrito como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

adicionando mais uma pitada de polêmica na famigerada questão do "dy/dx é fração".

Exemplo 16.11. Se $f(x) = x + x^3$ então existe $g = f^{-1}(x)$? Se sim, calcule $g'(x)$ e $g'(0)$. ◁

Exemplo 16.12. Seja $p(x) = x + \ln(x)$, com $x > 0$. Se $q(x)$ é a inversa de $p(x)$, mostre que

$$q'(x) = \frac{q(x)}{1 + q(x)}.$$

◁

Exemplo 16.13. Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $y = \arctan(x)$

b) $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow$ cuidado! $g(x)$ não é constante!

c) $y = (x + 3)^{x^2}$

◁

Solução. *a) Se* $y = \arctan(x)$ *então* $\tan(y) = x$. *Derivando implicitamente com respeito a x temos*

$$\sec^2(y)y' = 1$$

ou seja,

$$y' = \frac{1}{\sec^2(y)}.$$

Dividindo a identidade trigonométrica $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$ *por* $\cos^2(\theta)$ *obtemos*

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta),$$

portanto

$$\sec^2(y) = 1 + \tan^2(y) = 1 + x^2.$$

Assim,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

b) Se $y = f(x)^{g(x)}$ *então* $\ln(y) = g(x)\ln(f(x))$. *Derivando implicitamente, obtemos*

$$\frac{1}{y}y' = g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x),$$

e daí

$$y' = y\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + g(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)\right).$$

c) Se $y = (x+3)^{x^2}$ *então* $\ln(y) = x^2\ln(x+3)$. *Derivando com respeito a y,*

$$\frac{1}{y}y' = 2x\ln(x+3) + x^2\frac{1}{x+3},$$

e daí

$$y' = (x+3)^{x^2}\left(2x\ln(x+3) + x^2\frac{1}{x+3}\right).$$

□

17 Polinômios de Taylor e o Teorema do Valor Médio

17.1 Aproximações lineares e diferenciais

(Esta seção não será abordada com destaque na aula, já fizemos contas muito parecidas na motivação da derivada.)

Estamos usando a notação $\frac{dy}{dx}$ como sinônimo de $f'(x)$. Veremos agora interpretar isto de outra forma: como variações locais de $f(x)$.

Já vimos isso algumas aulas atrás, quando aproximamos uma função $y = f(x)$ pela equação da reta tangente $y = ax + b$ perto de um ponto x_0 (com $a = f'(x_0)$).

Algebricamente, $f(x)$ ser diferenciável em x_0 significa que existe o limite

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

onde $\Delta x = x - x_0$.

Seja

$$E(x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0).$$

Então temos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} E(x) = 0.$$

Isto significa que se tomarmos valores de Δx bem pequenos, então $E(x)$ será quase zero. Ou seja, se calcularmos $f'(x_0)$ usando o quociente $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ cometeremos um erro, mas será um pequeno erro.

De forma mais explícita, seja $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Então o gráfico de $y = T(x)$ é a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $(x_0, f(x_0))$, e temos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x),$$

onde $E(x)$ é o erro que se comete na aproximação de $f(x)$ por $T(x)$.

Se queremos somente uma aproximação de $f(x)$ com x perto de x_0, podemos simplesmente calcular $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, e teremos $T(x) \approx f(x)$.

Vejamos como usar isso na prática.

Exemplo 17.1. Este exemplo nos fornecerá uma forma "simples" de calcular raiz quadrada. Se h é pequeno e $a > 0$ então

$$\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

◁

Solução. *Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Então*

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \;\; dy = f'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx.$$

Tomando $x = a^2$ e $dx = \Delta x = h$ obtemos que

$$\sqrt{a^2 + h} - \sqrt{a^2} \approx \frac{h}{2a}$$

ou seja,

$$\sqrt{a^2+h} \approx a + \frac{h}{2a}.$$

Por exemplo, se queremos estimar $\sqrt{104}$*, podemos tomar* $a = 10$ *e* $h = 4$*. Daí:*

$$\sqrt{104} \approx 10 + \frac{4}{20} = 10,2.$$

O valor de $\sqrt{104}$*, se calculado com mais casas decimais, é* $10,1980390272....$ □

Exemplo 17.2. Calcule $\operatorname{sen}(33^o)$. ◁

Solução. *Note inicialmente que não sabemos direito como calcular seno de "ângulos", mas só de radianos. Assim,* $33^o \equiv \pi/6$ *e* $3^o = \pi/60$*.*

Lembre agora que $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$*. Se* $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ *e* $a = 30^o$ *então:*

$$\operatorname{sen}(30^o + 3^o) \approx \operatorname{sen}(30^o) + \cos(30^o)3^o = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{60} \approx 0,5 + 0,86 \cdot 0,05 = 0,5425.$$

□

Observação 17.3. A frase "a fórmula $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$ vale para h pequeno" carrega pouca precisão, pois "pequeno" é um termo pouco definida do ponto de vista matemático. Se olharmos a expressão completa,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x),$$

onde $x = a + h$, ela tem uma função de erro $E(x)$. Em casos concretos, deveremos entender bem o comportamento da função $E(x)$ para poder definir melhor o que é "pequeno". Sem isso, ficamos com uma medida muito subjetiva, e as aproximações não serão muito boas.

Vimos que

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0),$$

e daí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0.$$

O erro $E(x)$ calculado anteriormente considerou uma aproximação de $f(x)$ por uma função polinomial de grau 1. Podemos melhorar um pouco esta aproximação, considerando funções $E(x)$ um pouco mais especializadas e aumentando o grau do polinômio que usamos para aproximar a função. Por exemplo, é possível provar o seguinte.

Teorema 17.4 (Fórmula de Taylor)**.** *Seja* f *derivável até ordem* n *no intervalo* I *e* $x_0 \in I$*. O polinômio*

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

é chamado de polinômio de Taylor de ordem n *de* f *em* $x = x_0$ *e este é o polinômio de grau até* n *que melhor aproxima localmente* $f(x)$ *em torno de* x_0*, de modo que o erro* $E(x)$ *satisfaz*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Observação 17.5. No Teorema 17.4, quanto maior n, melhor será a aproximação.

Observação 17.6. Não iremos falar sobre raio de convergência aqui, mas na verdade a soma que define $p(x)$ pode ser escrita como uma soma infinita. Só que nem toda soma infinita converge, ou seja, nem sempre podemos substituir o x por um número. Para substituir x por um valor, precisamos que x esteja dentro de um intervalo da forma $(x_0 - R, x_0 + R)$, onde $R > 0$ é o "raio de convergência". No caso das funções e^x, $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$, além de muitas outras, este raio é infinito, o que significa que poderemos usar a série para aproximar qualquer valor da função.

Exemplo 17.7. Calcule $\operatorname{sen}(33^o)$ usando uma aproximação de 7a ordem. ◁

Solução. *Convertendo para radianos, queremos calcular* $\operatorname{sen}(33\pi/180)$. *Temos que*

$$\operatorname{sen}(x) \approx x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/5040.$$

Usando a aproximação $\pi \approx 22/7$, *temos que*

$$\operatorname{sen}(33^o) \approx 0,5448334243...$$

enquanto um valor com mais casas decimais corretas seria

$$\operatorname{sen}(33^o) \approx 0,5446390350...$$

□

Exemplo 17.8 (Como sua calculadora calcula e^2?)**.** O polinômio de Taylor de grau 8 de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ é

$$p(x) = \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1.$$

Substituindo $x = 2$ obtemos

$$p(2) = 34913/4725 = 7,38899,$$

que é uma boa aproximação para $e^2 = 7,38906..$ ◁

Observação 17.9. No Mathematica/WolframAlpha, o comando `Normal[Series[f,{x,x0,n}]]` calcula o polinômio de Taylor de f de grau n em x_0.

Exemplo 17.10. Calcule o polinômio de Taylor das funções $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ até ordem 5, e utilize-o para decidir qual dos números é maior: $\cos(4/5)$ ou $\operatorname{sen}(3/5)$? Você confia neste resultado? ◁

17.2 O Teorema do Valor Médio

Estamos agora caminhando rumo a dois objetivos:

- estudar problemas de otimização e
- fazer esboços detalhados de gráficos.

Os próximos teoremas são passos importantes nesta direção.

Teorema 17.11 (Teorema de Rolle)**.** *Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), com $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Ou seja: se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que a reta tangente ao gráfico no ponto $(c, f(c))$ é horizontal.

Exemplo 17.12. Mostre que para qualquer valor de $c \in \mathbb{R}$, o polinômio $p(x) = x^4 + 4x + c$ tem no máximo duas raízes reais. ◁

Teorema 17.13 (TVM)**.** *Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

ou

$$f(b) - f(a) = f'(c)\big(b - a\big).$$

O TVM é uma espécie de generalização do Teorema de Rolle: se r é a reta secante ao gráfico de $y = f(x)$ que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existe uma reta s, paralela a r e que é tangente ao gráfico de $y = f(x)$.

Corolário 17.14. *Se uma função $f(x)$ está definida em $[a,b]$ e satisfaz $f'(x) = 0$ no intervalo (a,b) então $f(x)$ é uma função constante em $[a,b]$.*

Corolário 17.15. *Se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que duas funções satisfazem $f'(x) = g'(x) + c$ no intervalo (a,b), então $f(x) = g(x)$ para $x \in [a,b]$.*

Exemplo 17.16. Considere uma função $f(x)$ tal que $f'(x) = k$ para todo $x \in (a,b)$. Prove que $f(x)$ é uma função linear. ◁

Exemplo 17.17. Um professor do IMECC-Unicamp deu aula até as 10h e seguiu para o IME-USP assistir uma palestra, que começaria às 11h. Ele chegou sem atraso na palestra, mas dias depois recebeu uma multa por excesso de velocidade. Sabendo que o limite máximo de velocidade no percurso Campinas $\to$ SP é de 100 km/h, você acha que a multa foi justa? ◁

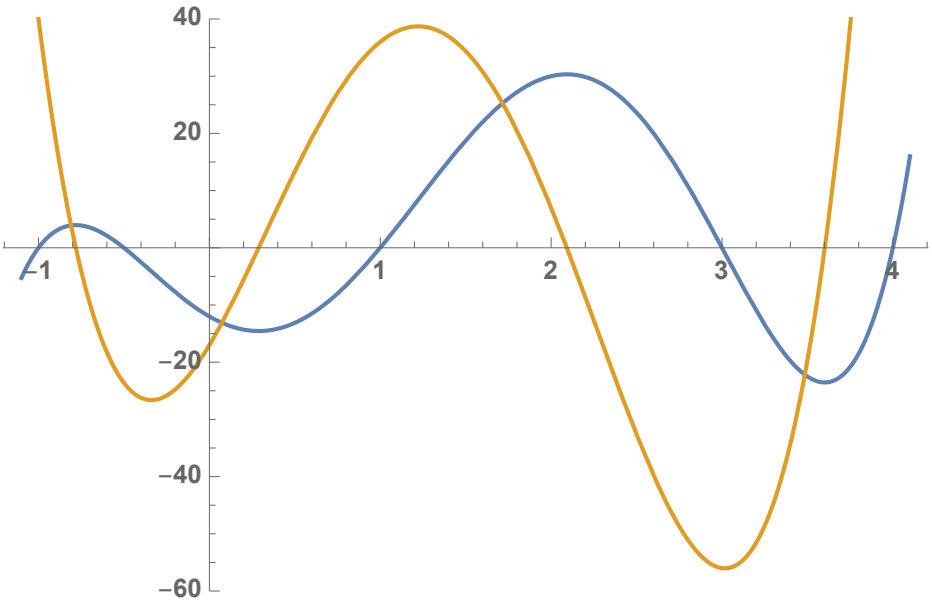
Exemplo 17.18. Dois corredores iniciaram uma corrida ao mesmo tempo e terminaram a corrida empatados. Prove que os dois corredores estiveram à mesma velocidade v_0, ainda que talvez em instantes diferentes da corrida. ◁

Exercício 17.19. *Mostre que $|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$ quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}$.*

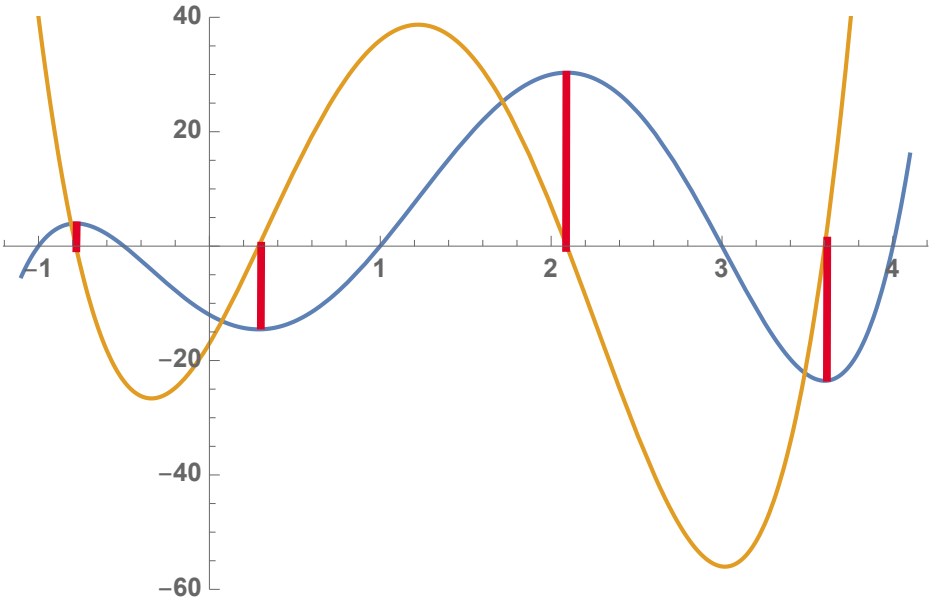
17.3 Uma feliz coincidência?

Vamos utilizar o polinômio $p(x) = 2x^5 - 13x^4 + 15x^3 + 25x^2 - 17x - 12$ para motivar um resultado muito importante. Note que $p'(x) = -17 + 50x + 45x^2 - 52x^3 + 10x^4$.

Considere os gráficos de $y = p(x)$ (azul) e $y = p'(x)$ (laranja):



Vamos destacar agora os pontos em que o gráfico laranja corta o eixo x, relacionando-os com o gráfico azul:



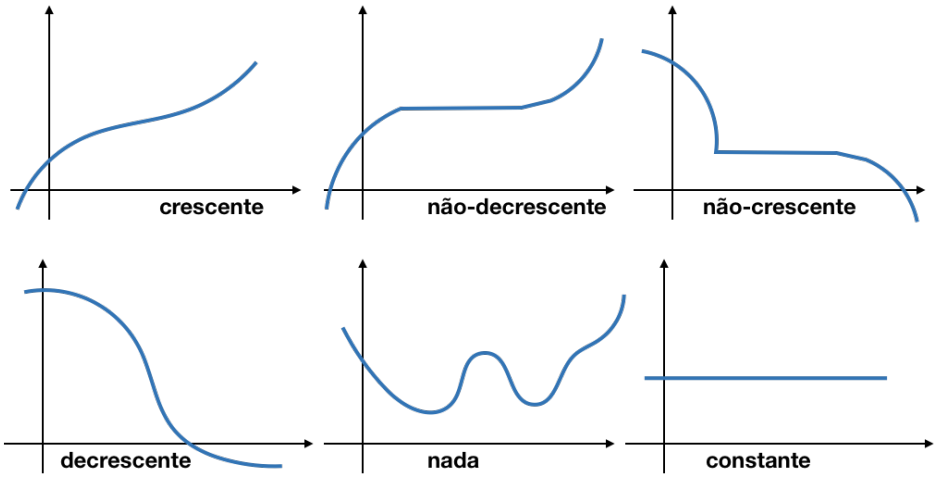
Vocês também estão com a impressão de que os pontos de máximo/mínimo locais estão associados aos pontos onde a derivada dá zero? Então vocês estão corretos!

Veremos na próxima aula mais detalhes sobre isso.

18 Pontos críticos, crescimento e decrescimento

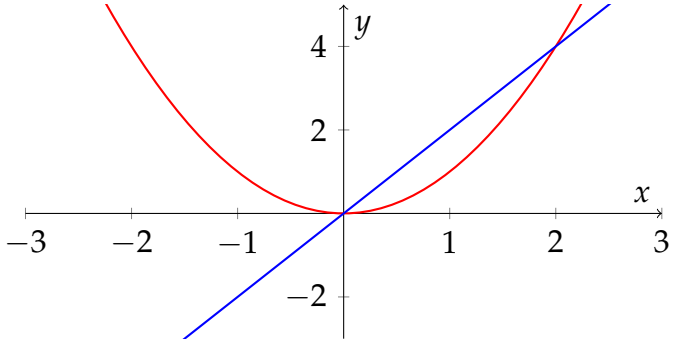
18.1 Crescimento e decrescimento de funções

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A função f é chamada de não-decrescente em A se para quaisquer $x, y \in A$ com $x < y$ tivermos $f(x) \leq f(y)$. No caso da desigualdade estrita, dizemos que a função é crescente. A função f é chamada de não-crescente em A se para quaisquer $x, y \in A$ com $x < y$ tivermos $f(x) \geq f(y)$. No caso da desigualdade estrita, dizemos que a função é decrescente.



Veremos agora que os intervalos de crescimento/decrescimento da função $f(x)$ tem uma relação muito interessante com os intervalos em que a derivada $f'(x)$ é positiva/negativa.

Exemplo 18.1. Seja $f(x) = x^2 - 1$, cujo gráfico é mostrado a seguir em vermelho.



A função $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e é crescente no intervalo $(0, \infty)$.

A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 2x$, e $f'(x)$ satisfaz: $f'(x) < 0$ em $(-\infty, 0)$ e $f'(x) > 0$ em $(0, \infty)$. Veremos que essa situação acontece em geral. ◁

Teorema 18.2. *Seja f uma função contínua no intervalo $I = (a, b)$.*

a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ então f será crescente em I.

b) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ então f será decrescente em I.

Demonstração. A prova é muito parecida para ambos os casos. Vamos fazer (a).

Sejam $s, t \in I$ com $t > s$. Pelo TVM existe $c \in (s,t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c)\big(t - s\big)$. Por hipótese, $f'(c) > 0$, logo $f(t) - f(s) > 0$ e daí $f(t) > f(s) \Rightarrow f$ crescente.

□

Exemplo 18.3. Estude os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.
◁

Exemplo 18.4. Estude os intervalos de crescimento e decrescimento de $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$.
◁

Tudo que sobe, desce. Este ditado, uma releitura imprecisa da lei da gravitação universal, também se aplica para algumas funções. Se uma função é crescente no intervalo (a,b) e decrescente no intervalo (b,c), então em $x = b$ a função acima o seu maior valor, se considerarmos somente o intervalo (a,c).

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $f(p)$ é o valor máximo de f em A (ou que $x = p$ é um ponto de máximo) se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x \in A$. Dizemos que $f(p)$ é o valor mínimo de f em A (ou que $x = p$ é um ponto de mínimo) se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in A$.

Um ponto $x = p$ é mínimo local se a condição acima vale para um pequeno intervalo centrado em p, ou seja, se existe $r > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$ para todo $x \in (p - r, p + r)$. Analogamente definimos ponto de máximo local.

Teorema 18.5 (um dos teoremas de Fermat)**.** *Se f tem um máximo ou mínimo local em $x = p$ e $f'(p)$ existe, então $f'(p) = 0$.*

Um ponto $x = p$ tal que $f'(p) = 0$ (ou tal que $f'(p)$ não existe) é chamado de **ponto crítico** de f.

Observação 18.6. Isto significa que se $x = p$ é máximo ou mínimo local, então $f'(p) = 0$. Note que não significa que se $f'(p) = 0$ então o ponto será de máximo ou mínimo local.

Observação 18.7. O termo "ponto crítico" não é muito correto. Um ponto é algo que tem duas coordenadas. O correto seria "número crítico", mas acho que fazer esta distinção neste momento iria gerar alguma confusão.

Exemplo 18.8. Retomando o Exemplo 18.1, se $y = f(x) = x^2$, obtemos que $f'(x) = 2x$ e portanto $x = 0$ é o único ponto crítico. Esta informação não é suficiente para concluirmos que $x = 0$ é ponto de máximo ou mínimo local (a função pode não ter nenhum máximo ou mínimo local).
◁

Sabendo que $f'(p) = 0$, como decidir se $x = p$ é máximo ou mínimo local? O próximo teorema nos ajuda bastante.

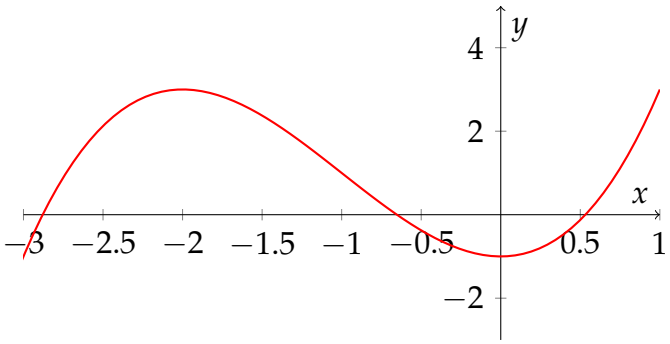
Teorema 18.9 (Teste da derivada 2a)**.** *Seja f uma função com duas derivadas contínuas em seu domínio e seja $x = p$ um ponto do domínio.*

a) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$ então $x = p$ é ponto de mínimo local.

b) Se $f'(p) = 0$ e $f''(p) < 0$ então $x = p$ é ponto de máximo local.

Exemplo 18.10. Continuando o Exemplo 18.8, sabemos que $x = 0$ é o único ponto crítico e que $f''(x) = 2 > 0$. Portanto, pelo Teorema anterior, $x = 0$ é mínimo local. ◁

Exemplo 18.11. Estude os pontos máximos e mínimos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ e esboce o gráfico de $y = f(x)$.



◁

18.1.1 Máximos e mínimos em intervalos fechados

É preciso tomar um cuidado especial quando $y = f(x)$ está definida num domínio fechado.

Neste caso, precisaremos comparar os valores da função nos pontos críticos com os valores que a função assume nos extremos do intervalo para determinar o máximo e o mínimo global.

Exemplo 18.12. Um bom exemplo disto é a função $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ no intervalo $[-4, 2]$. Apesar de existirem máximos e mínimos locais, o valor mínimo da função é $f(-4)$ e o máximo é $f(2)$.

◁

Este maior maior da função às vezes é chamado de máximo global (e o mínimo, de mínimo global).

18.2 A relação da derivada segunda com gráficos

Dizemos que uma função $y = f(x)$ tem concavidade pra cima no intervalo (a, b) se o gráfico de $y = f(x)$ está acima do gráfico da reta tangente em todo ponto de (a, b). Diremos que o a função tem concavidade pra baixo se acontece o contrário.

Se $y = f(x)$ é uma função, dizemos que um número $x = p$ é um ponto de inflexão de f se existirem a, b com $a < p < b$ no domínio de f tal que a concavidade de f em (a, p) é distinta da concavidade de f em (p, b).

Teorema 18.13. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em seu domínio.*

a) Se $f''(x) > 0$ em I então f terá concavidade para cima em I.

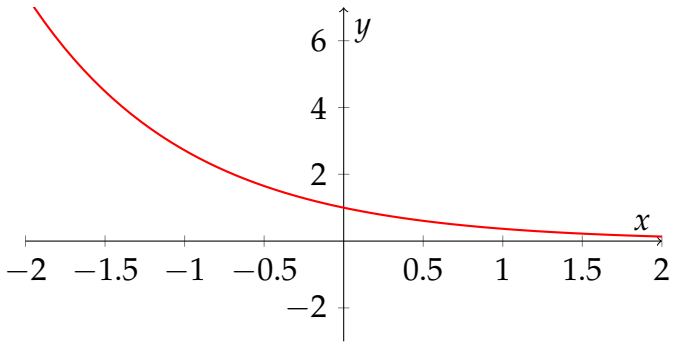
b) Se $f''(x) < 0$ em I então f terá concavidade para baixo em I.

Teorema 18.14 (pontos de inflexão). *Se f é três vezes derivável, $f'''(x)$ é contínua em $x = p$, $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$ então $x = p$ é ponto de inflexão.*

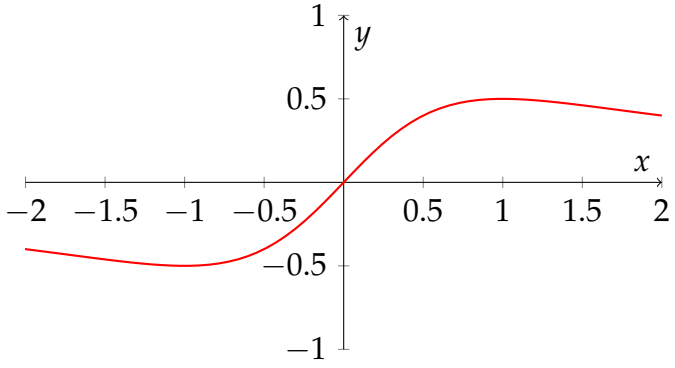
Observação 18.15. Um ponto de inflexão não precisa ser um ponto crítico. Verifique isso na função $y = x^4 - 2x^3$.

Exemplo 18.16. Estude a concavidade e esboce os gráficos de:

a) $f(x) = e^{-x^2/2}$



b) $g(x) = x/(1 + x^2)$



◁

Exemplo 18.17. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições b, c devem satisfazer para que $x = 1$ seja um ponto de inflexão de f? ◁

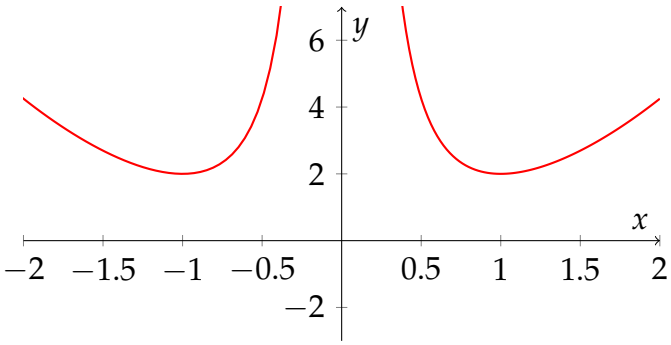
19 Esboços de gráficos e problemas de otimização

19.1 Esboço de gráficos

Para esboçarmos o gráfico de $y = f(x)$ será necessário obter:

- domínio e interceptos com os eixos
- intervalos de crescimento e decrescimento
- máximos e mínimos locais
- concavidade e pontos de inflexão
- limites laterais, se for o caso
- assíntotas

Exemplo 19.1. Esboce o gráfico de $y = f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$.



◁

Exemplo 19.2. Estude os intervalos de crescimento e decrescimento de $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$.
◁

Exemplo 19.3. Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
◁

Exemplo 19.4. Qual é o maior valor de $h(x) = \sin(x) + \cos(x)$? ◁

19.2 Problemas de otimização

Nesta seção, abordaremos alguns problemas de otimização. Muitos são problemas "aplicados" (*word problems*), e parte da dificuldade está em "traduzir" em linguagem matemática o que o problema pede. Após esta modelagem matemática, ficaremos com dois tipos de problemas:

1. sem vínculo explícito: "Calcule o mínimo ou máximo de tal função."
2. com vínculo explícito: "Calcule o máximo/mínimo de $f(x)$ sabendo que $h(x) = 0$."

Como filosofia geral, na resolução de um problema matemático, sempre tenha em mente o seguinte: o objetivo é resolver o problema, independente do método. Algumas soluções são melhores que as outras, mas ainda é melhor uma solução ruim do que nenhuma solução.

Abordaremos aqui alguns métodos que funcionam quando as funções envolvidas são "boas" (diferenciáveis, etc), mas é possível que alguns dos problemas possam ser resolvidos sem que métodos de cálculo diferencial sejam utilizados.

Exemplo 19.5. Determine o número real positivo cuja soma com o inverso do seu quadrado seja mínima. ◁

Solução. *Seja $x > 0$ o número procurado. Então $x + 1/x^2$ é o menor possível. Ou seja, precisamos calcular o menor valor da função $f(x) = x + 1/x^2$ com $x > 0$. Derivando, obtemos $f'(x) = 1 - 2/x^3$, e portanto $f'(x) = 0$ se $x = \sqrt[3]{2}$.* □

Exemplo 19.6. Determine o ponto da curva $y = 2/x$ ($x > 0$) que está mais próximo da origem. ◁

Solução. *Um ponto na curva $y = 2/x$ é sempre da forma $(x, 2/x)$. A distância de um ponto assim até a origem é dada por $d = \sqrt{x^2 + 4/x^2}$, e esta é a função que queremos minimizar. Podemos minimizar d^2. Termine a conta!* □

Observação 19.7. Você consegue elaborar um argumento geométrico que leve a solução do problema anterior, sem usar derivadas?

Exemplo 19.8. Determine as dimensões do cilindro circular reto de área total S que tem volume máximo. ◁

Exemplo 19.9. Determine o retângulo de maior área e lados paralelos aos eixos coordenados que está inscrito na elipse $4x^2 + y^2 = 1$.

◁

Solução. *Fixado um ponto (x, y) na elipse, o retângulo pedido estará determinado. Por simetria, a área do retângulo será $A = 4xy$.*

Como (x, y) está na elipse, temos $4x^2 + y^2 = 1$. Para simplificar as contas, vamos maximizar $A^2 = 16x^2y^2$ (com a alteração na função a ser maximizada, o ponto de máximo não será alterado, mas o valor máximo sim; é preciso estar atento a isto.) Assim, a função a ser maximizada é

$$A^2 = 16x^2y^2$$

com vínculo $4x^2 + y^2 = 1$. Substituindo y^2, temos a função a ser maximizada dependendo só de x:

$$f(x) = A^2 = 16x^2(1 - 4x^2).$$

Resolvendo $f'(x) = 0$ obtemos os pontos críticos $x = 0$ e $x = \pm 1/(2\sqrt{2})$. O Teste da segunda derivada mostra que $x = \pm 1/(2\sqrt{2})$ são máximos locais e, portanto, soluções do problema (ambos recaem no mesmo retângulo).

□

Exemplo 19.10 (Boulos, vol. 1)**.** Uma mosca está num arco de parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ ($y \geq 0$). Descreva a parte desse arco no qual a mosta pode ficar a fim de não ser vista por um observador em $(1/2, 0)$. ◁

Exemplo 19.11. Determine uma reta r tangente ao gráfico de $y = 1 - x^2$ de modo que a distância da origem até r seja a menor possível. ◁

Solução. *A distância d de (x_0, y_0) até a reta $r: \ ax + by + c = 0$ é dada por*[4]

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A reta tangente que passa por $(p, 1 - p^2)$ é

$$y = f'(p)(x - p) + f(p)$$

ou

$$2px + y - 1 - p^2 = 0.$$

Assim

$$g(p) = d^2 = \frac{(1 + p^2)^2}{1 + 4p^2}.$$

Agora resta calcular os pontos críticos!

$$g'(p) = \frac{4p\left(p^2 + 1\right)\left(2p^2 - 1\right)}{\left(4p^2 + 1\right)^2}$$

$$g'(p) = 0 \Rightarrow p \in \{0, \pm 1/\sqrt{2}\}$$

Fazendo o teste da segunda derivada, temos que $g''(0) < 0$ e $g''(\pm 1/\sqrt{2}) > 0$, logo $x = 0$ é ponto de máximo local e $x = \pm 1/\sqrt{2}$ são pontos de máximo local (explicado pela simetria da função). Note que se $x = \pm 1/\sqrt{2}$ então a distância é igual a $3/4$, que é a menor distância possível.

Confira a geometria do problema neste link do Geogebra: `https://www.geogebra.org/classic/kbsxy7nc`

□

Observação 19.12. Alguns comentários sobre o exercício anterior:

- Este exercício envolve uma modelagem não muito fácil da equação a ser minimizada.
- Observe que a distância entre a reta tangente e a origem nem sempre é medida no ponto de tangência (na verdade, isto só acontece no ponto $(0, 1)$), por isto a conta dá errado se modelarmos considerando o tamanho do segmento que liga o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(p, 1 - p^2)$.

Exemplo 19.13. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições b, c devem satisfazer para que $x = 1$ seja um ponto de inflexão de f? ◁

[4] Mais detalhes, veja `https://youtu.be/4P0hdoguYzs?t=1081`.

20 Teoremas de L'Hospital e mais algumas aplicações

20.1 Teoremas de l'Hospital

Chegou o momento que vocês tanto esperavam! Sejam f, g funções deriváveis e suponha que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

seja igual a $0/0$ ou $\pm\infty/\infty$, onde a pode ser um número ou $a = \infty$.

Veremos agora que, sob certas condições, poderemos escrever que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

e em muitos casos este segundo limite é mais fácil de ser calculado.

Teorema 20.1 (l'Hospital 1)**.** *Sejam f, g funções deriváveis em $(p-r, r)$ e em $(p, p+r)$ com $g'(x) \neq 0$ para $0 < |x-p| < r$. Se*

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0,\ \lim_{x\to p} g(x) = 0$$

e se $\lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (ou for igual a ∞) então $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

O enunciado ainda continua verdadeiro tomando limites laterais ou tomando $p = \pm\infty$.

Note que o Teorema de l'Hospital fala sobre limites de quocientes de funções. Às vezes conseguimos aplicá-lo para produto de funções, desde que a gente consiga transformar o produto em um quociente. Isto pode ser feito com a observação de que, se $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, então

$$a \cdot b = \frac{a}{1/b} = \frac{b}{1/a}.$$

Exemplo 20.2. Calcule $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$. ◁

Solução. *O primeiro passo é reescrever*

$$x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x}.$$

Note que se $x \to 0^+$, então $\ln(x) \to -\infty$ e $1/x \to \infty$, logo o quociente resulta em (muitas aspas aqui) "∞/∞". Usando o Teorema de l'Hospital, teremos

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} (1/x)/(-1/x^2) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

□

O Teorema de l'Hospital vale também se o limite inicial resulta em "∞/∞". É o conteúdo do próximo teorema:

Teorema 20.3 (l'Hospital 2)**.** *Sejam f, g funções deriváveis em (m, p) com $g'(x) \neq 0$ em (m, p). Se*

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to p^-} g(x) = \infty$$

e se $\lim_{x\to p^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existir (ou for igual a ∞) então $\lim_{x\to p^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to p^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observação 20.4. O resultado anterior continua verdadeiro tomando outros limites laterais ou tomando $p = \pm\infty$.

A prova dos teoremas de l'Hospital é baseada nos lemas a seguir:

Lema 20.5. *Suponha g derivável no intervalo aberto $I = (p, q)$ com $g'(x) > 0$ em I e com $\lim_{x\to p^+} g(x) = 0$. Então temos $g(x) > 0$ para todo $x \in I$.*

Lema 20.6. *Sejam f, g funções deriváveis em $I = (p, q)$ com $g'(x) > 0$ em I, com*

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^+} g(x) = 0.$$

Suponha que para todo $x \in I$ tenhamos $\alpha < \dfrac{f'(x)}{g'(x)} < \beta$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então $\alpha < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \beta$ para todo $x \in I$.

Demonstração. (do Teorema de l'Hospital) Suponha que

$$\lim_{x\to p^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, com $\delta < r$, tal que para $p < x < p + \delta$ temos

$$L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon.$$

O lema anterior garante que também vale

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos

$$\lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

□

Observação 20.7. Apesar de ter dado crédito a l'Hospital pelos teoremas acima, ambos foram provados por Johannes Bernoulli e foram comprados por l'Hospital. Sim, comprados! Detalhes em: `https://andrescaicedo.wordpress.com/2013/11/05/credit/`.

Observação 20.8. O teorema de l'Hospital pode precisar ser usado várias vezes. Se f, f' estão nas hipóteses do Teorema, então

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to p}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

e por aí vai (sempre verificando se as hipóteses ainda são verdadeiras).

Exemplo 20.9. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{1/x}$

◁

Algumas aplicações dos teoremas de l'Hospital exigem uma preparação maior na expressão. Já vimos uma delas: o caso em que $ab = a/(1/b)$. Veremos outros dois casos, de funções do tipo $f(x)^{g(x)}$ e funções do tipo $f(x) - g(x)$. Confira os exemplos resolvidos abaixo.

Exemplo 20.10. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}(4x))^{\operatorname{cotan}(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\sec(x)-\tan(x))$

◁

Solução. *a) Calculando* ln *em ambos os lados da equação*

$$y = \left(1+\frac{3}{x}\right)^x$$

ficamos com

$$\ln(y) = \ln\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right),$$

e daí usando propriedades de $\ln$ *obtemos*

$$\ln(y) = x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

Calculando limite com $x \to 0$ *em ambos os lados ficamos com*

$$\lim_{x\to 0} \ln(y) = \lim_{x\to 0} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

O limite do lado direito resulta em uma indeterminação do tipo "$0 \cdot \infty$*". Podemos transformar o limite em um quociente, para obter uma indeterminação do tipo "*$\infty\infty$*" para usar o Teorema de l'Hospital:*

$$\lim_{x\to 0} \ln(y) = \lim_{x\to 0} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{1/x}$$

Agora sim, temos o numerador tendendo a $-\infty$ *e o denominador tendendo a* ∞*. Podemos aplicar o Teorema de L'Hospital!*

$$\lim_{x\to 0} \ln(y) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{1/x} \underbrace{=}_{l'H} \lim_{x\to 0} \frac{-3/(3x + x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{3x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{3 + x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \ln(y) = 0.$$

Como $\ln$ *é uma função contínua, podemos inverter o limite com o* $\ln$ *e obter*

$$\ln(\lim_{x\to 0} y) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1.$$

b) *Vamos fazer algo parecido com o que fizemos em (a). Seja*

$$y = (1 + \operatorname{sen}(4x))^{\operatorname{cotan}(x)}.$$

Então

$$\ln(y) = \operatorname{cotan}(x)(1 + \operatorname{sen}(4x)).$$

Agora é só proceder como antes.

c) *Note que*

$$\sec(x) - \tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{1 - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Quando $x \to \pi/2$*, numerador e denominador tendem a zero. O Teorema de L'Hospital poderá te ajudar a resolver este limite.*

□

20.2 Mais algumas aplicações

A ideia desta seção é abordar alguns detalhes no uso de derivadas em aplicações.

20.2.1 O truque do log para derivadas

Um bom mágico nunca explica seus truques. Já bons matemáticos adoram fazer isso.

Exemplo 20.11. Seja $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4}$. Calcule dy/dx. ◁

Solução. *Calculando* ln *dos dois lados da equação, ficamos com*

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln\left(\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4}\right) = \ln(x^{3/4}\sqrt{x^2+1}) - \ln((3x+2)^4) \\ &= \ln(x^{3/4}) + \ln(\sqrt{x^2+1}) - 4\ln(3x+2) \\ &= (3/4)\ln(x) + (1/2)\ln(x^2+1) - 4\ln(3x+2) \end{aligned}$$

Agora resta derivar ambos os lados em x:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 4\cdot\frac{3}{3x+2}$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{4x} + \frac{2xy}{2x^2+2} - \frac{12y}{3x+2},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4x}\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4} + \frac{2x}{2x^2+2}\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4} - \frac{12}{3x+2}\frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^4}.$$

□

Exemplo 20.12. Seja $y = x^{\cos(x)}$. Calcule dy/dx. ◁

Solução. *Da mesma forma que antes, calculando* ln *nos dois lados da equação, ficamos com*

$$\ln(y) = \cos(x)\ln(x).$$

Derivando temos

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\text{sen}\,(x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}$$

e daí

$$\frac{dy}{dx} = -\text{sen}\,(x)\ln(x)x^{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{x}x^{\cos(x)}.$$

□

20.2.2 Funções hiperbólicas

Vamos definir algumas funções que envolvem e^x e e^{-x}. Elas tem um nome complicado, mas não se assuste.

Definimos:

- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, a função cosseno hiperbólico,
- $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, a função seno hiperbólico,
- $\tanh(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$, a função tangente hiperbólico.

As funções hiperbólicas satisfazem a uma identidade parecida com a identidade trigonométrica fundamental:

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1.$$

Em termos de derivadas, vale o seguinte (verifique!):

- $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$,
- $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$.

Exemplo 20.13. Calcule $f'(x)$, onde $f(x) = \operatorname{senh}(x^2)$. ◁

Exemplo 20.14. Deduza uma expressão para $\operatorname{senh}^{-1}(x)$, a inversa da função $\operatorname{senh}(x)$, e para a derivada de $\operatorname{senh}^{-1}(x)$. ◁

21 Exercícios: parte II

Exercício 21.1. *Seja $y = f(x)$ dada implicitamente por $y^3 + y = x$. Suponha que f seja derivável. Calcule $f'(x)$ e a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(10, f(10))$.*

Exercício 21.2. *Determine o valor de a para que a equação $x^3 + 3x^2 - 9x + a = 0$ admita uma única raiz real.*

Exercício 21.3. *Derive:*

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $g(x) = \cos(e^x)$

c) $h(x) = \dfrac{x \sin(e^x)}{\cos(x)}$

d) $p(x) = \dfrac{\cos(3x)}{x}$

Exercício 21.4. *Qual a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$?*

Exercício 21.5. *Estude os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.*

Exercício 21.6. *Estude os intervalos de crescimento e decrescimento de $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$.*

Exercício 21.7. *Determine o retângulo de maior área e lados paralelos aos eixos coordenados que está inscrito na elipse $4x^2 + y^2 = 1$.*

Solução. *Fixado um ponto (x, y) na elipse, o retângulo pedido estará determinado. Por simetria, a área do retângulo será $A = 4xy$.*

Como (x, y) está na elipse, temos $4x^2 + y^2 = 1$. Para simplificar as contas, vamos maximizar $A^2 = 16x^2y^2$ (com a alteração na função a ser maximizada, o ponto de máximo não será alterado, mas o valor máximo sim; é preciso estar atento a isto.) Assim, a função a ser maximizada é

$$A^2 = 16x^2y^2$$

com vínculo $4x^2 + y^2 = 1$. Substituindo y^2, temos a função a ser maximizada dependendo só de x:

$$f(x) = A^2 = 16x^2(1 - 4x^2).$$

Resolvendo $f'(x) = 0$ obtemos os pontos críticos $x = 0$ e $x = \pm 1/(2\sqrt{2})$. O Teste da segunda derivada mostra que $x = \pm 1/(2\sqrt{2})$ são máximos locais e, portanto, soluções do problema (ambos recaem no mesmo retângulo).

□

Exercício 21.8. *Determine uma reta r tangente ao gráfico de $y = 1 - x^2$ de modo que a distância da origem até r seja a menor possível.*

Solução. *A distância d de* (x_0, y_0) *até a reta* $r: \ ax + by + c = 0$ *é dada por*[5]

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A reta tangente que passa por $(p, 1 - p^2)$ *é*

$$y = f'(p)(x - p) + f(p)$$

ou

$$2px + y - 1 - p^2 = 0.$$

Assim

$$g(p) = d^2 = \frac{(1 + p^2)^2}{1 + 4p^2}.$$

Agora resta calcular os pontos críticos!

$$g'(p) = \frac{4p\left(p^2 + 1\right)\left(2p^2 - 1\right)}{\left(4p^2 + 1\right)^2}$$

$$g'(p) = 0 \Rightarrow p \in \{0, \pm 1/\sqrt{2}\}$$

Fazendo o teste da segunda derivada, temos que $g''(0) < 0$ *e* $g''(\pm 1/\sqrt{2}) > 0$*, logo* $x = 0$ *é ponto de máximo local e* $x = \pm 1/\sqrt{2}$ *são pontos de máximo local (explicado pela simetria da função). Note que se* $x = \pm 1/\sqrt{2}$ *então a distância é igual a* $3/4$*, que é a menor distância possível.*

Confira a geometria do problema neste link do Geogebra: `https://www.geogebra.org/classic/kbsxy7nc`

□

[5]Mais detalhes, veja `https://youtu.be/4P0hdoguYzs?t=1081`.

22 Integrais de Riemann e Primitivas

Dada uma função $f(x)$, você aprendeu a calcular $f'(x)$. Agora, você terá que fazer o contrário: dada $f'(x)$, a derivada de uma função, você terá que obter $f(x)$!

Pronto, acabou a matéria! (deixa só eu explicar alguns pequenos detalhes)

22.1 A integral de Riemann

O alemão Bernhard Riemann é famoso por várias coisas em matemática. A integral de Riemann é uma delas[6], e é do que vamos falar hoje.

Uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ com

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Denote por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o tamanho do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Seja f uma função definida em $[a, b]$ e P uma partição de $[a, b]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, escolha $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Intuitivamente[7], pode-se pensar que nosso objetivo é aproximar a região entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x por retângulos de base $x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$. O número

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$$

é chamado de soma de Riemann de f relativa à partição P e aos números c_i, denotada por

$$R(f, n, c) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$$

Vimos que se aumentarmos o número de retângulos ($n \to \infty$) então $R(f, n, c)$ se aproxima cada vez mais do que chamamos de "área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x"[8].

Definimos o limite

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

como sendo a integral definida de f de a até b, desde que este limite exista e dê o mesmo valor para todas as escolhas de partições P e pontos c_j. Se o limite existir, nestas condições, dizemos que f é integrável em $[a, b]$, e o valor do limite é a integral de f em $[a, b]$. A função f é chamada de integrando.

A principal questão neste momento é: quando o limite acima existe?

Teorema 22.1. *Se f for contínua em $[a, b]$ ou se f tiver apenas um número finito de descontinuidades do tipo "salto" em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$, ou seja, a integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.*

Demonstração. A prova deste teorema não é difícil, mas usa conceitos de supremo/ínfimo um pouco complicados. Basicamente, mostramos que a integral fica entre a soma "por cima" e a soma "por baixo" e mostramos que as sequências convergem pro mesmo lugar. Não iremos fazer a prova neste curso. □

[6] Outra coisa que Riemann fez é um "problema" chamado hipótese de Riemann, que é um problema cuja solução vale um milhão de dólares.

[7] Esta interpretação funciona bem pro caso $f(x) > 0$.

[8] Cuidado! as áreas abaixo do eixo x contam negativo.

Da forma como definimos $\int_a^b f(x)\,dx$, esta integral pode ser calculada se conseguirmos um modo de calcular o limite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

Vejamos um exemplo.

Exercício 22.2. *Se $f(x) = x^2$ e $[a,b] = [0,1]$, então como podemos calcular $\int_0^1 x^2\,dx$?*

Solução. *Seja $f(x) = x^2$, $[a,b] = [0,1]$ e*

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1\right\}$$

uma partição. Seja $c_i = i/n$. Então

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Devemos conseguir trocar $\sum_{i=1}^{n} i^2$ por algo que só dependa de n para poder calcular de fato o limite. Lembre-se que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

e portanto

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3},\end{aligned}$$

que é o queríamos calcular. □

Observação 22.3. Na prova acima, afirmamos que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Iremos dar uma justificativa deste fato. Não será uma demonstração, pois precisaríamos usar uma técnica chamada princípio da indução matemática, mas usaremos uma justificativa razoavelmente convincente.

Queremos obter uma fórmula para descrever $\sum_{i=1}^{n} i^2$ que dependa só de n, ou seja, queremos obter uma função

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Vamos começar com um caso mais simples: ao invés da soma dos quadrados, vamos obter uma função $T(n)$ que nos dê a soma dos n primeiros números inteiros positivos,

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} i.$$

Eu sei que você se lembra das suas aulas sobre progressões aritméticas e já sabe uma expressão para $T(n)$, mas vamos fazer de conta que você não saiba. Um bom ponto de partida, que às vezes funciona, é supor que $T(n)$ é uma função polinomial. Então vamos fazer isto.

Suponha então que $T(n)$ é um polinômio de grau 1, ou seja, $T(n) = na + b$ para alguns valores de a, b. Como $T(n)$ é a soma

$$\sum_{i=1}^{n} i,$$

temos que $T(1) = 1$ e $T(2) = 3$. Portanto, temos o sistema

$$\begin{cases} T(1) = 1 & \Leftrightarrow & 1 = a + b, \\ T(2) = 3 & \Leftrightarrow & 3 = 2a + b, \end{cases}$$

cuja solução nos dá $a = 2$ e $b = -1$, ou seja, $T(n) = 2n - 1$. Esta fórmula funciona para $n = 1$ e $n = 2$. Porém, note que $T(3) = 5$, porém a soma $1 + 2 + 3$ resulta em 6. Logo, nossa fórmula não vale! Onde erramos?

O erro foi supor que $T(n)$ é um polinômio de grau 1, e isto pode ser falso. Antes de desistir, vamos tentar com um polinômio de grau 2. Seja $T(n) = an^2 + bn + c$.

Assim, novamente deveremos ter $T(1) = 1$, $T(2) = 3$ e $T(3) = 6$, e obtemos o sistema

$$\begin{cases} T(1) = 1 & \Leftrightarrow & 1 = a + b + c, \\ T(2) = 3 & \Leftrightarrow & 3 = 4a + 2b + c, \\ T(3) = 6 & \Leftrightarrow & 6 = 9a + 3b + c, \end{cases}$$

cuja solução é $a = 1/2$, $b = 1/2$ e $c = 0$. Isto nos dá

$$T(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Então obtemos

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Note que $T(4) = \dfrac{4(4+1)}{2} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$, então esta fórmula funciona também para muitos outros valores. Então provamos que

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \ldots + n?$$

Não! O que fizemos foi supor que a soma dos n primeiros inteiros poderia ser dada por um polinômio e, usando alguns valores, encontramos uma fórmula que parece funcionar.

Para provar formalmente que

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \ldots + n,$$

podemos utilizar uma técnica conhecida como Princípio da Indução Finita.

Voltando ao nosso caso, queremos uma fórmula fechada para

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Suponha que $S(n)$ seja um polinômio cúbico,

$$S(n) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Agora imponha $1 = S(1), 5 = S(2), 14 = S(3)$ e $30 = S(4)$. Ficaremos com o sistema

$$\begin{cases} T(1) = 1 & \Leftrightarrow & 1 = a + b + c + d, \\ T(2) = 5 & \Leftrightarrow & 5 = 8a + 4b + 2c + d, \\ T(3) = 14 & \Leftrightarrow & 14 = 27a + 9b + 3c + d, \\ T(4) = 30 & \Leftrightarrow & 30 = 64a + 16b + 4c + d. \end{cases}$$

A solução deste sistema é $a = 1/3$, $b = 1/2$, $c = 1/6$ e $d = 0$, e *voilà*, temos nossa fórmula:

$$T(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Que tal usar esta estratégia para tentar obter uma fórmula para a soma dos n primeiros cubos?

22.2 Primitivas

Uma função $F(x)$ é chamada de primitiva de $f(x)$ num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Exemplo 22.4. Alguns exemplos de primitivas:

a) uma primitiva de $g(x) = \cos(x)$ é $G(x) = \operatorname{sen}(x)$.

b) uma primitiva de $f(x) = 2x$ é $F(x) = x^2$.

c) uma primitiva de $q(x) = 1/x$ é $Q(x) = \ln(x)$.

d) uma primitiva de $p(x) = 1/(1 + x^2)$ é $P(x) = \arctan(x)$.

◁

Os próximos resultados contém propriedades muito importantes sobre primitivas.

Teorema 22.5. *Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ então, para todo $c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ também é uma primitiva de $f(x)$.*

Demonstração. Vimos como consequência do Teorema do Valor Médio que se duas funções $f(x), g(x)$ satisfazem $f'(x) = g'(x)$ para todo x num certo intervalo, então $f(x) - g(x) = k$, para alguma constante. Isto conclui a prova. □

Teorema 22.6. *Se f é contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ para todo $x \in I$.*

Demonstração. Este resultado também é uma consequência direta do TVM. □

Teorema 22.7. *Seja $f(x)$ derivável em $\mathbb{R}$ tal que $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = ke^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $h(x) = f(x)/e^x$. Para provar o teorema, basta mostrar que $h'(x) = 0$. Assim, usando o item anterior, teremos que existe k tal que $h(x) = k$, ou seja, $f(x) = e^x$. □

A última proposição contém uma equação diferencial. Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função e suas derivadas, e cuja solução é uma função.

Exemplo 22.8. Por exemplo, $y'(x) = y(x)$ é uma equação diferencial cuja solução é da forma $y(x) = e^x$.
◁

Nem toda equação diferencial tem solução, e mesmo quando existe solução, nem sempre ela pode ser representada por funções elementares. Veremos mais sobre isto no curso de Cálculo 3.

Exercício 22.9. *Resolva a equação diferencial $y'(x) = 2y(x)$ e $y(0) = 2$.*

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ em $I \subset \mathbb{R}$, então $F(x) + k$ será a família de primitivas de f. Esta família de primitivas será denotada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k.$$

Nesta notação, a função $f(x)$ é o integrando e a primitiva $F(x)$ é a integral indefinida de f. Vamos fazer alguns exemplos?

Observação 22.10. De onde vem o sinal $\int$? Vem de uma carta de Leibniz, em 1675. Era um "S", que ficou muito grande e espaçado, e virou este sinal de integral.

22.3 Calculando integrais definidas

Nas próximas aulas, veremos o seguinte resultado.

Teorema 22.11. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função ~~contínua~~ integrável. Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

onde F é uma primitiva de f, ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Isto nos dá uma outra forma de calcular $\int_0^1 x^2\,dx$, bem mais fácil do que a que fizemos no começo da aula:

Exemplo 22.12.

$$\int_0^1 x^2\,dx = 1/3.$$

◁

Veremos também formas de obter primitivas de funções.

Exemplo 22.13. Calcule $\int e^{5x}\,dx$, determinando uma função $G(x)$ tal que $G'(x) = e^{5x}$. ◁

23 Funções definidas por integrais, áreas e integração por substituição

23.1 Funções definidas por integrais

Vimos dois tipos de integrais: a integral definida e a integral indefinida.

O primeiro tipo, denotado por

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

é um número. Já o segundo tipo, denotado

$$\int f(x)\,dx.$$

é uma função (ou uma família de funções).

Podemos ainda ter um terceiro tipo de "coisas" relacionadas com integrais: as funções definidas por integrais. Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, \infty)$ e defina

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

A função g é a função definida pela integral de f.

Exemplo 23.1. No caso $f(x) = 2x$, temos que

$$g(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x (2t)\,dt = t^2\Big|_1^x = x^2 - 1.$$

◁

Em outros casos, não conseguiremos melhorar a expressão de $g(x)$:

Exemplo 23.2. No caso $f(x) = e^{x^2}$, temos que

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

e não conseguimos dizer muito mais sobre isso (além de que $g(0) = 0$). ◁

No entanto, se

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

sabemos muito sobre a sua derivada:

$$g'(x) = f(x).$$

Ou seja,

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

é uma primitiva de $f(x)$.

Isto nos permite dar a seguinte interpretação informal: derivação e integração são processos inversos.

23.2 Integração por substituição

Vamos nos lembrar da regra da cadeia: se $f(x), g(x)$ são funções boas, então

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x).$$

Integrando em ambos os lados, e usando que a integração é um processo inverso da derivação, obtemos

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f(g(x))'\,dx = f(g(x)) + c.$$

Agora vamos deduzir uma fórmula parecida, mas bem mais geral. Suponha que queremos integrar uma expressão do tipo $f(g(x))g'(x)$, ou seja, queremos calcular

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Seja $u = g(x)$. Então

$$\frac{du}{dx} = g'(x)$$

e daí vamos fazer de conta que a gente pode tratar du/dx como uma fração, e "passar" o dx pro outro lado. Assim, ficamos com $du = g'(x)dx$. Substituindo tudo isso na integral anterior, ficamos com

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Observação 23.3. No momento, não iremos justificar o "passar o dx pra lá". Em momento oportuno, você entenderá a justificativa deste procedimento.

Feita a substituição

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du,$$

nos restará saber obter uma primitiva para $f(u)$, mas daí é outro problema. O problema agora é: como escolher $u = g(x)$? Qual parte do integrando será a função u?

Exemplo 23.4. $\int x\,e^{x^2}\,dx$ ◁

Exemplo 23.5. $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ ◁

23.3 Áreas

Se $f(x) \geq 0$, a integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

calcula a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x. Da mesma forma, se $f(x) \geq g(x) \geq 0$ e queremos a área entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, com $x \in [a, b]$, podemos usar a integral

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Note que, operacionalmente, o que faremos nesta conta será calcular

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx,$$

ou seja, estamos calculando a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$ e descontando deste valor a área abaixo do gráfico de $y = g(x)$. Faça uma figura para se convencer de que este é o procedimento correto!

É preciso atenção a dois fatores ao calcularmos áreas:

- área entre funções que não são positivas: neste caso, é preciso muito cuidado, pois a área entre $y = f(x)$ e o eixo x é calculada por

  $$\int_a^b |f(x)|\, dx,$$

  e daí precisaremos de cuidado com as definições do módulo.

- área entre funções cujos gráficos de interceptam: como no caso anterior, a área entre o gráfico de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ é dada por

  $$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx,$$

  e é preciso cuidado com o módulo.

Vamos fazer dois exemplos.

Exemplo 23.6. Calcule a área entre o gráfico de $y = \cos(x)$ e o eixo x com $x \in [0, 2\pi]$. ◁

Exemplo 23.7. Calcule a área delimitada pelos gráficos das funções $y = 1 - x^2$ e $y = x$ (qual será o limite de integração?).
◁

Observação 23.8. Tenha em mente que existe uma diferença na semântica do problema. Uma coisa é "calcule a área entre $y = \operatorname{sen}(x)$ e o eixo x com $x \in [0, 2\pi]$", a outra é "calcule $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx$". São contas diferentes, e resultados diferentes.

24 O Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta aula vamos discutir um importante método de integração. Antes, porém, vamos revisar mais uma vez tudo que vimos até agora sobre integrais.

24.1 Primitivas e o Teorema Fundamental do Cálculo

Dada uma função $f(x)$, dizemos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$. A integral indefinida de $f(x)$ é a família de funções denotada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Definimos a integral (definida) de $f(x)$ com x entre a e b como sendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \left(f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n\right),$$

onde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ é uma partição de $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Observação 24.1. Note que pela forma como construímos a integral, se $a < b$ então

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Desta forma, podemos convencionar que o número no extremo inferior do símbolo da integral sempre será menor que o número no extremo superior.

A integral pode ser vista como um operador linear, nos dois casos: a integral indefinida leva a função $f(x)$ numa função $F(x)$ com a propriedade de que $F'(x) = f(x)$; já a integral definida de a até b leva uma função num número. A linearidade nos diz que, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções e $c \in \mathbb{R}$, então

$$\int \left(f(x) + c \cdot g(x)\right)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right) + c \cdot \left(\int g(x)\,dx\right)$$

e

$$\int_a^b \left(f(x) + cg(x)\right)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) + c \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Além disso, se $\alpha \in [a, b]$, então podemos decompor a integral como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_c^\alpha f(x)\,dx.$$

Algumas estimativas para os cálculos de integrais são as seguintes.

- Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

- Se $m \geq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$ então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)|\,dx$

Alguns resultados envolvendo integrais são chamados de "Teoremas Fundamentais do Cálculo".

Teorema 24.2. *Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e defina*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

com $x \in [a,b]$. Então a função $g(x)$ é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), com

$$g'(x) = f(x).$$

O resultado do teorema anterior pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Vejamos agora a versão deste resultado para integrais definidas:

Teorema 24.3. *Seja $f(x)$ contínua em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, ou seja, $F'(x) = f(x)$.

Como $F'(x) = f(x)$, podemos reescrever o resultado do teorema anterior como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

24.2 Integração por substituição

Para integrais indefinidas, temos:

Teorema 24.4. *Se $u = g(x)$ for uma função integrável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I então*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

No caso de integrais definidas, a versão do teorema é a seguinte:

Teorema 24.5. *Se $u = g(x)$ tem derivada contínua em $[a,b]$ e $f(x)$ é contínua na imagem de $u = g(x)$ então*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Exemplo 24.6. Mostre que se f é par então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. ◁

Exemplo 24.7. Mostre que se f é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. ◁

Exemplo 24.8. Calcule as integrais abaixo.

a) $\displaystyle\int e^{5x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos(2x)\,dx$

c) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,x^3\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2+6x}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^6+x^2+2}\,dx$

◁

Exemplo 24.9. Calcule as integrais abaixo.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} x(x+1)^{100}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \cos(x)\operatorname{sen}^5(x)\,dx$

◁

25 Integração por partes

25.1 Integração por partes

Já vimos que se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis, então

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Portanto

$$f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x).$$

Assim,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = \int (f(x)g(x))'\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Como $\int (f(x)g(x))'\,dx = f(x)g(x)$, segue que

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Teorema 25.1 (Integração por partes)**.** *Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções deriváveis, então*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Uma maneira mais fácil de aplicar a integração por partes é fazendo o seguinte. Denote $u = f(x)$ e $v = g(x)$. Então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$. Substituindo na integral, obtemos

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Observação 25.2. A integração por partes, portanto, se aplica quando o integrando é um produto de duas funções. Escolheremos um termo do produto para "chamar" de u e o outro para "chamar" de v. Nem sempre esta escolha será simples.

Observação 25.3. Não confunda este "u" com aquele da integração por substituição, só estamos usando a mesma letra, mas é outra coisa.

Exemplo 25.4. $\int x\,e^x\,dx$ ◁

Exemplo 25.5. $\int x\,\ln(x)\,dx$ ◁

Exemplo 25.6. $\int x\,\mathrm{sen}\,(x)\,dx$ ◁

Exemplo 25.7. $\int t^2\,e^t\,dx$ ◁

Exemplo 25.8. $\int 1 \cdot \ln(x)\,dx$ ◁

Exemplo 25.9. $\int e^x \cdot \mathrm{sen}\,(x)\,dx$ ◁

Exemplo 25.10. $\int_0^1 \arctan(x)\,dx$ ◁

Exemplo 25.11. $\int \sec^3(x)\,dx$ ◁

Observação 25.12. Se você está achando o ritmo do curso meio lento nesta parte de integrais, você tem razão. É importante dar uma desacelerada na teoria para você conseguir fazer várias integrais.

26 Integrais trigonométricas

Revisão das aulas anteriores.

Exemplo 26.1. Calcule $\int \sec(x)\,dx$. ◁

Exemplo 26.2. Calcule $\int \arctan(x)\,dx$. ◁

Exercício 26.3. *Calcule* $\int \ln(1+x^2)\,dx$.

26.1 Integrais trigonométricas

Vamos aprender a resolver integrais que envolvem produtos e potências de funções trigonométricas. Note que no caso mais simples, tipo

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx$$

não precisamos de nenhuma nova técnica: na integral anterior, a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$ já transforma a integral em uma fácil de resolver. Outra possibilidade seria usar a identidade

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

e daí transformar a integral em

$$\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

Para casos mais complicados, veremos que o uso de identidades trigonométricas vai nos ajudar bastante. Começaremos com alguns exemplos.

Exemplo 26.4. $\int \operatorname{sen}(7x)\cos(5x)\,dx$ ◁

Solução. *A abordagem "de sempre" não funciona, já que se fizermos* $u = \operatorname{sen}(7x)$ *então* $du = 7\cos(7x)\,dx$*, mas deveríamos ter feito aparecer um* $\cos(5x)\,dx$*. Vamos precisar utilizar alguma identidade para simplificar o integrando. Temos:*

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(7x+5x) &= \operatorname{sen}(7x)\cos(5x) + \operatorname{sen}(5x)\cos(7x)\\ \operatorname{sen}(7x-5x) &= \operatorname{sen}(7x)\cos(5x) - \operatorname{sen}(5x)\cos(7x)\end{aligned}$$

Somando obtemos

$$\operatorname{sen}(7x)\cos(5x) = \frac{\operatorname{sen}(12x)+\operatorname{sen}(2x)}{2}.$$

Agora é só integrar!

□

Não é difícil perceber como a coisa funciona no caso geral.

Exemplo 26.5. No caso de integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)\,dx,\ \int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)\,dx \text{ ou } \int \cos(ax)\cos(bx)\,dx$$

basta fazer uma simplificação algébrica baseada nas seguintes identidades:

- $\operatorname{sen}(Ax+Bx) = \operatorname{sen}(Ax)\cos(Bx) + \operatorname{sen}(Bx)\cos(Ax)$
- $\operatorname{sen}(Ax-Bx) = \operatorname{sen}(Ax)\cos(Bx) - \operatorname{sen}(Bx)\cos(Ax)$
- $\cos(Ax-Bx) = \cos(Ax)\cos(Bx) + \operatorname{sen}(Ax)\operatorname{sen}(Bx)$
- $\cos(Ax+Bx) = \cos(Ax)\cos(Bx) - \operatorname{sen}(Ax)\operatorname{sen}(Bx)$

◁

Quando as integrais envolvem potências de $\cos(x)$ ou $\operatorname{sen}(x)$, duas expressões podem nos ajudar:

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},\ \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

Ambas podem ser deduzidas das identidades

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$$

e

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x).$$

Exemplo 26.6. Resolva $\int \cos^2(x)\,dx$.
◁

26.2 Integrais trigonométricas: potências

Exemplo 26.7. $\int \cos^3(x)\,dx$ ◁

Solução. *Note que substituição "simples" não funciona, nem integração por partes. Podemos reescrever*

$$\begin{aligned}\int \cos^3(x)\,dx &= \int \cos^2(x)\cos(x)\,dx \\ &= \int (1-\operatorname{sen}^2(x))\cos(x)\,dx \\ &= \int \cos(x)\,dx - \int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\,dx\end{aligned}$$

e agora usar a substituição $u = \operatorname{sen}(x)$ na segunda integral! □

Exemplo 26.8. $\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)\,dx$ ◁

Solução. *A substituição do exemplo anterior só funcionou pq conseguimos deixar um* $\cos(x)$ *isolado, colado no* dx*, para que pudesse servir de* du*. Conseguimos fazer isto aqui? Podemos reescrever*

$$\operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}^4(x)\cos^2(x)$$

e daí transformar o $\operatorname{sen}^4(x)$ *em uma expressão só envolvendo* $\cos(x)$*, pois*

$$\operatorname{sen}^4(x) = (\operatorname{sen}^2(x))^2 = (1-\cos^2(x))^2$$

e daí

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^2(x)\,dx = \int (1-\cos^2(x))^2\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)\,dx.$$

□

Exemplo 26.9. $\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx$ ◁

Solução. *Não dá mais para fazer o truque de separar um* $\operatorname{sen}(x)$ *ou um* $\cos(x)$*, pois agora o grau é ímpar. Mas podemos simplificar um pouco as expressões:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^4(x) &= (1-\cos^2(x))^2 \\
&= \left(1-\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\right)^2 \\
&= \frac{(1-\cos(2x))^2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{cos^2(2x)}{4} \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1+\cos(4x)}{8}
\end{aligned}$$

e agora é só integrar! □

Exemplo 26.10 (Caso geral)**.** No caso de integrais do tipo

$$\int \operatorname{sen}^r(x)\cos^s(x)\,dx$$

fazemos o seguinte:

- se r ou s são ímpares, use um dos fatores para agrupar como du.
- se r e s são pares, use as identidades

  $$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},\ \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

  para simplificar o integrando (no fim, recairá numa integral de um polinômio).

◁

Exemplo 26.11. $\int \tan^5(x)\sec^7(x)\,dx$ ◁

Solução. *Agora perdeu a graça, vocês já sabem como fazer: mas neste caso tem que lembrar que* $(\tan(x))' = \sec^2(x)$ *e que* $(\sec(x))' = \sec(x)\tan(x)$*. A chave para trocar entre tangentes e secantes é a equação*

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x).$$

São duas opções: ou devemos deixar um $\sec^2(x)$ *perto do* dx *para que tudo isto vire* du *(caso* $u = \tan(x)$*), ou então devemos deixar um* $\sec(x)\tan(x)$ *perto do* dx *(caso* $u = \sec(x)$*). Neste caso especial, note que*

$$\tan^5(x)\sec^7(x) = \tan^5(x)\sec^5(x)\sec^2(x)$$

não resolve (pois $\sec^5(x)$ *não quebra em tangentes). Mas podemos fazer*

$$\begin{aligned}\tan^5(x)\sec^7(x) &= \tan^4(x)\sec^6(x)\sec(x)\tan(x)\\ &= (\sec^2(x)-1)^2\sec^6(x)\sec(x)\tan(x)\end{aligned}$$

e agora tomar $u = \sec(x)$ *na integral, obtendo*

$$\int \tan^5(x)\sec^7(x)\,dx = \int (u^2-1)^2u^6\,du.$$

□

Exemplo 26.12 (Caso geral)**.** No caso de integrais do tipo

$$\int \tan^r(x)\sec^s(x)\,dx$$

fazemos o seguinte:

- se s é par, deixe $\sec^2(x)$ para agrupar com o du e transforme tudo em tangente.
- se r é ímpar, guarde $\sec(x)\tan(x)$ para agrupar com du e transforme tudo em secante.
- Outros casos podem ser complicados: por exemplo, tente depois calcular

$$\int \sec^3(x)\tan^2(x)\,dx.$$

◁

Exemplo 26.13. Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \cos^2(x)\tan^3(x)\,dx$

b) $\int x\sec(x)\tan(x)\,dx$

c) $\int \operatorname{sen}(8x)\cos(5x)\,dx$

◁

27 Substituições trigonométricas

27.1 Substituições trigonométricas

A circunferência unitária, denotada por S^1, é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Se isolarmos y nesta equação teremos duas expressões:

- $y = \sqrt{1 - x^2}$, com $x \in [-1, 1]$ é parte "de cima" circunferência e
- $y = -\sqrt{1 - x^2}$, com $x \in [-1, 1]$ é parte "de cima" circunferência.

Sabemos que a área desta circunferência é π. Então

$$\pi = 2 \int_{-1}^{1} \left(\left(\sqrt{1 - x^2}\right) - \left(- \sqrt{1 - x^2}\right) \right) dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Será que você consegue calcular a integral do lado direito de outra forma? Ah, deve ser fácil, vai. Você até já sabe a resposta!

Que tal tentar a mudança de variáveis $x = \operatorname{sen}(\theta)$? Neste caso, teremos $dx = \cos(\theta) d\theta$, e daí

$$\begin{aligned} A = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (\operatorname{sen}(\theta))^2} \cos(\theta) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^2 d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \big(1 + \cos(2\theta)\big) d\theta \\ &= 2\theta \Big|_0^{\pi/2} + \operatorname{sen}(2\theta) \Big|_0^{\pi/2} = \pi \end{aligned}$$

Em algumas integrais as substituições do tipo $u = \cos(\theta)$ ou $u = \operatorname{sen}(\theta)$ mantinham as integrais envolvendo funções trigonométricas.

Neste caso, as funções originais não são trigonométricas: iremos introduzir as funções trigonométricas por meio da mudança de variáveis.

Note que estamos, na verdade, usando um procedimento inverso do que usamos antes: agora, ao invés de trocarmos algo tipo $g(x)\, dx$ por du, iremos trocar dx por algo tipo $g(u)\, du$.

Observação 27.1. Como saber qual substituição devo usar? Resposta de sempre: experiência. Mas tenho algumas dicas.

- Como estamos aplicando a mudança "ao contrário", teremos que nos preocupar com o domínio de definição: a mudança precisará ser injetora no domínio envolvido.
- Na integral de antes, isto funcionou: $x = \operatorname{sen}(\theta)$ é injetora para $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

- Tipos de mudanças:
  - expressões envolvendo $\sqrt{a^2 - x^2}$: $x = a\text{sen}\,(\theta)$ pode ajudar.
  - expressões envolvendo $\sqrt{a^2 + x^2}$: $x = a\tan(\theta)$ pode ajudar.
  - expressões envolvendo $\sqrt{x^2 - a^2}$: $x = a\sec(\theta)$ pode ajudar.

Neste ponto, é preciso chamar atenção para um fato bem importante. Suponha que estamos resolvendo uma integral indefinida como

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Já sabemos como usar uma mudança de variável para resolver a integral. O problema é que teremos uma resposta em termos de θ. Como voltar para a variável x? É o que veremos na próxima seção.

27.2 Substituições trigonométricas

Sabemos calcular a integral

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

E se fosse

$$\int \sqrt{1 - 4x^2}\, dx?$$

Simples! Primeiro simplificamos

$$\sqrt{1 - 4x^2} = \sqrt{4(1 - (x/2)^2)} = 2\sqrt{1 - (x/2)^2}.$$

Agora propomos a mudança $u = 2\sin(t)$. Daí $du = 2\cos(t)\, dt$ e é só resolver a integral.

Exemplo 27.2. Calcule

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}\, dx.$$

◁

Solução. *A presença do termo $\sqrt{4 + x^2}$ no denominador deve nos fazer lembrar da identidade*

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x).$$

Aí você diz, com razão: "Professor, e aquele 4 ali?". Vamos dar um jeito nele, lembrando que

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}\, dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{4\left(1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}}\, dx.$$

Façamos agora $x = 2\tan(u)$. Assim $dx = 2\sec^2(u)\, du$. Colocando tudo na integral, temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2\sqrt{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}}\,dx &= \int \frac{1}{4\tan^2(u)\sqrt{4\left(1+\left(\frac{\cancel{2}\tan(u)}{\cancel{2}}\right)^2\right)}}\,2\sec^2(u)\,du \\
&= \int \frac{2\sec^2(u)}{8\tan^2(u)\sqrt{1+\tan^2(u)}}\,du \\
&= \int \frac{\sec^2(u)}{4\tan^2(u)\sec(u)}\,du \\
&= \int \frac{\sec(u)}{4\tan^2(u)}\,du \\
&= \int \frac{\cos(u)}{4\text{sen}^2(u)}\,du
\end{aligned}$$

Enfim, temos agora a integral

$$\int \frac{\cos(u)}{4\text{sen}^2(u)}\,du.$$

Esta é fácil: fazendo $w = \text{sen}(u)$ *teremos* $dw = \cos(u)\,du$*, logo*

$$\int \frac{\cos(u)}{4\text{sen}^2(u)}\,du = \int \frac{dw}{4w^2} = -\frac{1}{4w} + c.$$

Voltando a variável temos

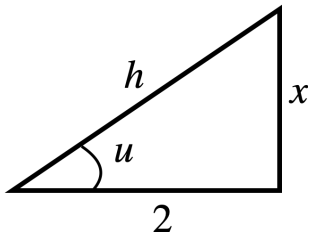
$$\int \frac{\cos(u)}{4\text{sen}^2(u)}\,du = \int \frac{dw}{4w^2} = -\frac{1}{4\text{sen}(u)} + c.$$

Como voltaremos para a variável x**?** *Até agora obtemos*

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx = -\frac{1}{4\text{sen}(u)} + c,$$

com $x = 2\tan(u)$*.*

Vamos representar esta mudança num triângulo:



- $\tan(u) = 2/x$
- $\text{sen}(u) = x/h$
- $h = \sqrt{4+x^2}$
- *Logo* $\text{sen}(u) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

Portanto:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}\,dx = -\frac{1}{4\text{sen}(u)} + c = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} + c$$

Ufa! □

Passos pra fazer a coisa funcionar:

1. Decidir a mudança de variáveis: isto vai depender basicamente do tipo de radical que existe na integral ($\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ ou $\sqrt{x^2-a^2}$).
2. Em geral isto fará com que a integral recaia numa outra, não envolvendo funções trigonométricas.
3. Muito cuidado com a mudança no dx.
4. Muito cuidado com a mudança no intervalo de integração!!
5. Se for uma integral indefinida, atenção para construir o triângulo que desfaz a mudança de variáveis.

Exemplo 27.3. Calcule $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$. ◁

Solução. *Neste caso, nenhuma identidade trigonométrica vai resolver, a não ser que façamos um pequeno truque.*

Note que $x^2+2x=(x+1)^2-1$, *logo*

$$\int \sqrt{x^2+2x}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2-1}\,dx$$

Seja $x+1=\sec(u)$. *Assim* $dx=\sec(u)\tan(u)\,du$ *e*

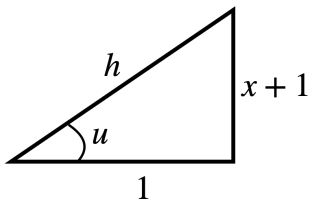
$$\int \sqrt{x^2+2x}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2-1}\,dx = \int \tan(u)\sec(u)\tan(u)\,du$$

Agrupando temos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x}\,dx &= \int \tan^2(u)\sec(u)\,du \\ &= \int (\sec^2(u)-1)\sec(u)\,du \\ &= \int \sec^3(u)\,du - \int \sec(u)\,du\end{aligned}$$

- $\int \sec(u)\,du = \ln\left|\sec(u)+\tan(u)\right| + c$ *(justifique!)*
- $\int \sec^3(u)\,du = \dfrac{\ln\left|\sec(u)+\tan(u)\right| + \sec(u)\tan(u)}{2} + c$ *(justifique!)*

Para retornar da variável u para a variável x usamos novamente o triângulo mágico:



$\tan(u)=x+1$, $\operatorname{sen}(u)=\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$, $\cos(u)=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$ □

Exemplo 27.4. Calcule $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$. ◁

Solução. *A presença de* $\sqrt{1-x^2}$ *sugere que utilizemos* $x = \operatorname{sen}(u)$. *Assim* $dx = \cos(u)\,du$. *Portanto*

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int \operatorname{sen}^3(u)\cos(u)\cos(u)\,du = \int \operatorname{sen}^3(u)\cos^2(u)\,du$$

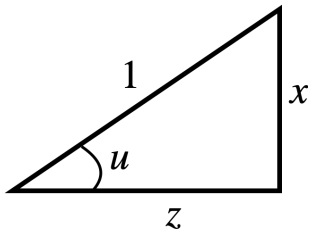
Já sabemos como resolver esta última integral: sacrificamos um dos termos $\operatorname{sen}(u)$ *obtendo*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3(u)\cos^2(u)\,du &= \int (1-\cos^2(u))\cos^2(u)\operatorname{sen}(u)\,du \\ &= -\int (1-y^2)y^2\,dy = -\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+c\end{aligned}$$

Desfazendo a mudança $\cos(u) = y$ *obtemos*

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+c = -\frac{\cos^3(u)}{3}+\frac{\cos^5(u)}{5}+c$$

Para desfazer $x = \operatorname{sen}(u)$, *vamos precisar do triângulo mágico:*



$\operatorname{sen}(u) = x$, $\cos(u) = z$, $1 = x^2 + z^2 \Rightarrow \cos(u) = \sqrt{1-x^2}$.

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}+\frac{(1-x^2)^{5/2}}{5}+c$$

□

Exemplo 27.5. Calcule as integrais abaixo:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$ usando $x = a\operatorname{sinh}(t)$.

◁

28 Frações parciais e integrais impróprias

28.1 Frações parciais

Sejam $p(x), q(x)$ funções polinomiais e considere a função

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R};\ q(x) = 0\}$. Funções desta forma são chamadas de funções racionais.

Ainda não sabemos integrar muitas funções racionais. Basicamente sabemos resolver

$$\int \frac{A\,dx}{(ax+b)^m} \quad \text{e} \quad \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx.$$

Sabemos?

Exemplo 28.1. Calcule

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

◁

Exemplo 28.2. Suponha $A, a, b \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$. Então se $u = ax + b$ então $du = a\,dx$ e

$$\int \frac{A\,dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{A\,du}{u^m}.$$

O próximo passo depende do valor de m.

$$m = 1 \ : \ \frac{1}{a}\int \frac{A\,du}{u^m} = \frac{A}{a}\ln(u) + c = \frac{A}{a}\ln(ax+b) + c$$

$$m \geq 2 \ : \ \frac{1}{a}\int \frac{A\,du}{u^m} = \frac{Au^{1-m}}{a(1-m)} + c = \frac{A(ax+b)^{1-m}}{a(1-m)} + c$$

◁

Exemplo 28.3. Suponha $A, B, a \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx &= \int \frac{Ax+B}{\left(a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\right)^n}\,dx \\
&= \int \frac{Ax+B}{a^n\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^n}\,dx \\
\left(u = x+\frac{b}{2a}\right) \qquad &= \frac{1}{a^n}\int \frac{Au-\frac{Ab}{2a}+B}{\left(u^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^n}\,du \\
&= \alpha\int \frac{\beta u+\gamma}{\left(u^2+\delta^2\right)^n}\,du
\end{aligned}$$

◁

Exemplo 28.4. Note que

$$\alpha \int \frac{\beta u + \gamma}{\left(u^2 + \delta^2\right)^n}\, du = \alpha \int \frac{\beta u}{\left(u^2 + \delta^2\right)^n}\, du + \alpha \int \frac{\gamma}{\left(u^2 + \delta^2\right)^n}\, du$$

e

- $\alpha \int \frac{\beta u}{\left(u^2 + \delta^2\right)^n}\, du$ pode ser resolvida fazendo $w = u^2 + \delta$ (neste caso $dw = 2u\, du$).
- $\alpha \int \frac{\gamma}{\left(u^2 + \delta^2\right)^n}\, du$ pode ser resolvida fazendo $u = \delta \tan(\theta)$ (recairá numa integral envolvendo $\sec(\theta)$).

◁

Como fazer os outros casos? Recaia num destes dois usando frações parciais.

28.1.1 Primeiro caso: fatores lineares sem repetição

$$f(x) = \frac{p(x)}{(a_1 x - b_1)(a_2 x - b_2) \cdot \ldots \cdot (a_k x - b_k)}$$

Note que

$$f(x) = \frac{A_1}{a_1 x - b_1} + \frac{A_2}{a_2 x - b_2} + \ldots + \frac{A_k}{a_k x - b_k}$$

para certos valores de $A_1, \ldots, A_k$.

Exemplo 28.5. Calcule

$$\int \frac{2x - 1}{2x^2 - 7x + 6}\, dx.$$

◁

- $2x^2 - 7x + 6 = (x - 2)(2x - 3)$
- $\frac{2x - 1}{2x^2 - 7x + 6} = \frac{2x - 1}{(x - 2)(2x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{2x - 3}$
- $$\begin{aligned} \int \frac{2x - 1}{2x^2 - 7x + 6}\, dx &= \int \frac{A}{x - 2}\, dx + \int \frac{B}{2x - 3}\, dx \\ &= A \ln|x - 2| + \frac{B}{2} \ln|2x - 3| + c \end{aligned}$$

28.1.2 Segundo caso: fatores lineares repetidos

$$f(x) = \frac{p(x)}{(a_1x - b_1)^{r_1}(a_2x - b_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (a_kx - b_k)^{r_k}}$$

Note que

$$f(x) = \frac{A_{1,1}}{a_1x - b_1} + \frac{A_{1,2}}{(a_1x - b_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,r_1}}{(a_1x - b_1)^{r_1}} + \ldots + \frac{A_{k,1}}{a_kx - b_k} + \ldots + \frac{A_{k,r_k}}{(a_kx - b_k)^{r_k}}$$

para certos valores de $A_{i,j}$.

Exemplo 28.6. Calcule

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x-3)^2(x+1)}\, dx.$$

◁

- $\dfrac{x^2 + 2}{(x-3)^2(x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{(x-3)^2} + \dfrac{C}{x+1}$
- $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{(x-3)^2(x+1)}\, dx = \int \frac{A}{x-3}\, dx + \int \frac{B}{(x-3)^2}\, dx + \int \frac{C}{x+1}\, dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2}{(x-3)^2(x+1)}\, dx = A \ln|x-3| - B\frac{1}{x-3} + C \ln|x+1| + k$

28.1.3 Terceiro caso: fatores quadráticos sem repetição

$$f(x) = \frac{p(x)}{(ax^2 + bx + c)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)},$$

onde os polinômios no denominador são distintos (não podem ser agrupados) e sem raízes reais.

Note que

$$f(x) = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_1x + B_1}{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}$$

para certos valores de A, B, A_1, B_1.

Exemplo 28.7. Calcule

$$\int \frac{5}{(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 3)}\, dx.$$

◁

$$\frac{5}{(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 3)} = \frac{Ax + b}{x^2 + x + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 3}$$

28.1.4 Quarto caso: fatores quadráticos repetidos

$$f(x) = \frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)^r},$$

com o polinômio no denominador sem raízes reais e $r > 0$.

Note que

$$f(x) = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_rx+B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

para certos valores de A_j, B_j.

Exemplo 28.8. Calcule

$$\int \frac{5}{(x^2+x+2)^2}\,dx.$$

◁

$$\frac{5}{(x^2+x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+x+2)^2}$$

Exemplo 28.9. Calcule

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x-2)^2(x^2+x+2)^3}\,dx.$$

◁

Exemplo 28.10. Se $a \neq b$, calcule

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)^4(x^2+x+1)(x^2+x+7)^2}$$

◁

28.2 Um caso mais complicado

Quando ao invés de funções racionais a integral envolver frações com funções trigonométricas, por exemplo

$$\int \frac{\cos^2(x)}{1+\operatorname{sen}^2(x)}\,dx,$$

uma salvação pode ser a mudança de coordenadas do arco-metade: $u = \tan(x/2)$, lembrando que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

Fazendo isto teremos

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Exemplo 28.11. Calcule

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos(x)}.$$

◁

Exemplo 28.12. Calcule

$$\int \frac{dx}{a + b\cos(x) + c\text{sen}\,(x)}.$$

◁

28.3 Integrais impróprias

28.3.1 Integrais em intervalos ilimitados

Até agora aprendemos a calcular integrais de funções contínuas por partes $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas em intervalos limitados.

No entanto, usando o mesmo princípio da integral de Riemann (tomando o limite de somas de Riemann com o tamanho da partição $\to 0$), podemos calcular também integrais em intervalos ilimitados.

O grande problema: fazer com que a soma de Riemann exista (já que estaremos somando num intervalo ilimitado).

Algumas concessões: nossa preocupação principal será mostrar que a integral existe; calcular o valor exato da integral ficará em segundo plano.

Teorema 28.13. *Se $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo valor de $t \in \mathbb{R}$, $t \geq a$, definimos*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista (existir = ser um número).

Teorema 28.14. *Se $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo valor de $t \in \mathbb{R}$, $t \leq b$, definimos*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista (existir = ser um número).

Quanto os limites dos slides anteriores existem, as integrais

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ e } \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$$

são ditas **convergentes**. Se os limites não existem, as integrais são ditas **divergentes**.

Se ambas as integrais são convergentes então:

Teorema 28.15. *Se $\int_c^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ são convergentes então definimos*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$$

Muito cuidado aqui! Perceba que se $f(x) \geq 0$, a integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

resulta na área abaixo do gráfico de $y = f(x)$ na região ilimitada $[x, \infty)$. Aí você me pergunta: como é possível que esta área seja finita? Sei lá, isto ainda me surpreende.

Exercício 28.16. *Calcule* $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ *e* $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

Exemplo 28.17. Calcule as integrais

(a) $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx\ (= -1)$

(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx\ (= \pi)$

(c) $\int_2^\infty \frac{3}{(x-1)^4}\,dx\ (= 1)$

(d) $\int_0^2 \frac{6}{(x-1)^5}\,dx$ (divergente)

◁

Exercício 28.18. *Determine para quais valores de p a integral*

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

converge e para quais valores ela diverge.

Observação 28.19. Seja $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Temos que

$$F(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0$$

e

$$\lim_{r\to\infty} F(r) = \int_1^\infty \frac{1}{t}\,dt = \lim_{r\to\infty} \int_1^r \frac{1}{t}\,dt = \infty.$$

Como a função $y = F(x)$ é contínua em $(1, \infty)$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe $c \in (1, \infty)$ tal que $F(c) = 1$. Esta é precisamente a definição do número e: um número que satisfaz $F(e) = 1$.

Ou seja, e pode ser definido como um valor tal que a área abaixo do gráfico de $y = 1/x$ entre $x = 1$ e $x = e$ vale exatamente 1.

De forma mais geral, e^k é o número real tal que o valor da área debaixo do gráfico de $y = 1/x$ entre $x = 1$ e $x = e^k$ vale k.

28.3.2 Integrais de funções descontínuas (assíntotas)

Seja $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ contínua e suponha que $x = b$ seja uma assíntota vertical de f. A mesma ideia de antes (tomar o limite no intervalo de integração) pode se aplicada aqui.

Teorema 28.20. *Se $\int_a^r f(x)\,dx$ existir para todo $a < r < b$ e se o limite*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to b^-} \int_a^r f(x)\,dx$$

existir, diremos que a integral converge.

O mesmo pode ser feito se a assíntota estiver em $x = a$. As noções de convergência/divergência também se aplicam aqui.

Exemplo 28.21. Calcule

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

◁

Solução. *Cuidado: a função*

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

não é contínua no intervalo $[0, 3]$, pois $x = 1$ é uma assíntota vertical. Não podemos então usar o Teorema Fundamental do Cálculo e trabalhar diretamente com a primitiva da função $y = 1/(x-1)$, calculando-a nos extremos da integral.

Vamos então quebrar a integral como

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{x-1}\,dx \\
&= \lim_{b\to 1^-} \left(\ln|x-1| \Big|_0^b \right) \\
&= \lim_{b\to 1^-} \ln|b-1| \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Como esta integral diverge, iremos considerar a integral inicial como divergente. Se ela fosse convergente, deveríamos calcular a outra parte, que a propósito resulta em

$$\int_a^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{a\to 1^+} \big(\ln(2) - \ln|a-1| \big) = \ln(2) - \infty.$$

□

Exemplo 28.22. Calcule

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx.$$

◁

Solução. *Lembre-se de que*

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c.$$

A função $y = \ln(x)$ tem sérios problemas com $x = 0$: não está definida no ponto. Portanto, não podemos calcular sua integral no intervalo $[0,1]$: esta é uma integral imprópria.

Assim

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+} \big(a\ln(a) - a - 1\big).$$

Note que

$$\lim_{a\to 0^+} \big(a\ln(a)\big) = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{\ln(a)}{1/a}\right) \underbrace{=}_{L'H} \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1/a}{-1/a^2}\right) = 0.$$

Portanto $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1.$ □

Muitas vezes conseguiremos concluir sobre a convergência ou não da integral, sem de fato calculá-la. O resultado abaixo ajuda muito nisto:

Teorema 28.23. *Sejam f, g funções contínuas com $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$.*

a) Se $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge então $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge.

b) Se $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge então $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

Exemplo 28.24. Mostre que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

converge usando um teste de comparação. ◁

Solução. *O truque aqui é quebrar a integral como*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Nesta decomposição, a primeira integral não é imprópria, e como o integrando é contínuo, a integral existe. Na segunda integral, note que para $x > 1$ temos que $-x^2 \leq -x$, daí $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Portanto

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x}\,dx,$$

sendo que agora podemos calcular a segunda integral, que resultará em e^{-1} (faça a conta!), e daí

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + 1/e,$$

logo é convergente.

□

Observação 28.25. É possível provar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

e faremos isso no curso de Cálculo 2.

Exemplo 28.26. Mostre que a integral

$$\int_1^\infty \frac{5+\cos(x)}{x}\,dx$$

é divergente comparando o integrando com $y = 1/x$. ◁

29 Volumes, comprimento de arco e o Teorema do Valor Médio para integrais

29.1 Volumes

29.1.1 Integrando seções transversais

Se S é um sólido localizado entre (os planos) $x = a$ e $x = b$ e a área da seção transversal quando cortamos S pelo plano P_{x_0} é $A(x_0)$, então o volume de S é dado por

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx,$$

desde que a função $A(x)$ seja contínua.

Exemplo 29.1 (Volume do cilindro)**.** Qual o volume do cilindro circular reto com base de raio r e altura h? ◁

Solução. *Note que neste cilindro a área das seções transversais é constante, $A(x) = \pi r^2$. Assim*

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \pi r^2\,dx = \pi r^2 h.$$

□

Exemplo 29.2 (Volume da esfera)**.** Qual o volume da esfera de raio r? ◁

Solução. *Se a esfera está entre $x = -r$ e $x = r$, note que*

$$A(x) = \pi(r^2 - x^2).$$

Assim

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

□

Exemplo 29.3. Seja R a região entre as curvas $y = x$ e $y = x^2$, com $x \in [0, 1]$. Gire esta região em torno do eixo x e obtenha um sólido S. Qual o volume de S? ◁

Solução. *Como determinar a área neste caso? Simples, basta analisar a figura (veja no quadro!)*

$$A(x) = \pi x^2 - \pi x^4.$$

Assim

$$V = \int_0^1 (\pi x^2 - \pi x^4)\,dx = \frac{2\pi}{15}$$

□

Exemplo 29.4 (A trombeta de Gabriel)**.** Considere a curva $y = 1/x$ com $x \in [1, \infty)$. Fazendo uma rotação contínua desta curva em torno do eixo x, teremos uma trombeta infinita, chamada de trombeta de Gabriel (o anjo).

O volume compreendido pela trombeta de Gabriel pode ser calculado como

$$V = \int_1^\infty \pi(1/x)^2 \, dx = \pi.$$

Pode-se calcular a área lateral da trombeta de Gabriel pela integral

$$A = \int_1^\infty 2\pi(1/x) \, dx = \infty.$$

Ou seja: se você quiser construir a trombeta de Gabriel de papelão, terá que usar uma quantidade infinita de papelão, mas mesmo assim ela poderá armazenar apenas cerca de 3,14 litros de água. Um exemplo celestial, mas infernal para a compreensão do estudante. ◁

O cálculo do volume usando a integral

$$\int_a^b A(x) \, dx$$

pode ser adaptado para calcularmos volume de regiões giradas em torno do eixo y, nos casos em que conseguimos descrever a "fronteira" da região como uma função de y. Neste caso, o cálculo do volume pode ser feito com uma integral do tipo

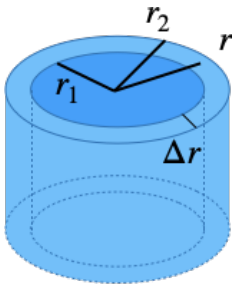
$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} B(y) \, dy.$$

Exemplo 29.5. Seja A a área entre o gráfico de $y = x^2$ e as retas $y = 1$ e $x = 0$. Seja S o sólido obtido girando A em torno do eixo y. Calcule o volume de S. ◁

29.1.2 Volumes por cascas cilíndricas

Nos casos em que não conseguimos descrever a seção transversal como uma função de x (ou de y), podemos usar um outro método para calcular o volume, que não envolve fatiar o sólido. O método é chamado de método das cascas cilíndricas, mas poderia ser chamado de método da cebola.

Como se calcula o peso de uma cebola? Ora, você abre a cebola e calcula o peso de cada uma das "cascas". É o que faremos com os sólidos. Vamos ver como fazer isto no exemplo da casca cilíndrica canônica.



Uma forma de calcular o volume do sólido acima é fazer

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} h(r_2 - r_1) = 2\pi r h \Delta r.$$

Assim obtemos que se a região abaixo do gráfico de $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, é girada em torno do eixo y, seu volume é dado por

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx = \int_a^b \underbrace{2\pi x}_{\text{circunferência}} \underbrace{f(x)}_{\text{altura}} \underbrace{dx}_{\text{espessura}}.$$

Exemplo 29.6. Calcule o volume do sólido obtido quando fazemos a rotação no eixo y da região entre o gráfico de $y = x^2 + 1$ e o eixo x, com $x \in [0, 2]$. ◁

$$V = \int_0^2 2\pi x(x^2 + 1)\, dx = 12\pi$$

Exemplo 29.7 (Volumes)**.** Se S é um sólido entre $x = a$ e $x = b$ e a área da seção transversal quando cortamos S pelo plano P_x é $A(x)$, então o volume de S é dado por

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)\, dx,$$

desde que a função $A(x)$ seja contínua. ◁

Exemplo 29.8. Um artesão decide fazer um vaso de cerâmica que se parece com o sólido obtido pela revolução do gráfico da função $y = x^2 + 1$, para $x \in [-1, 1]$, em torno do eixo x. Qual o volume o vaso comportará? ◁

Exemplo 29.9. Calcule o volume do sólido obtido quando fazemos a rotação no eixo y da região entre o gráfico de $y = x^2 + 1$ e o eixo x, com $x \in [0, 2]$. ◁

29.1.3 Resumo

Seja R a região entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x, com $x \in [a, b]$. Seja S_x o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo x e S_y o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo y. Então o volume de S_x é

$$V(S_x) = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx$$

e o volume de S_y é

$$V(S_y) = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx.$$

29.2 Comprimento de arco

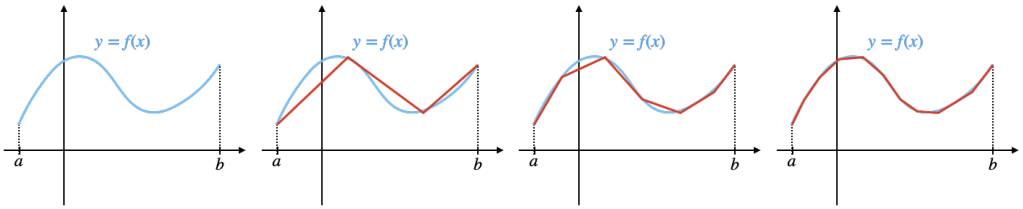
Até agora vimos a integral como uma ferramenta interessante para calcular áreas. Em alguns minutos veremos como adaptá-la para calcular volumes. E como fazemos para calcular comprimentos?

Seja $y = f(x)$ uma função contínua com $x \in [a, b]$. O comprimento de arco de f é o "comprimento" da curva que representa o gráfico de $y = f(x)$. Didaticamente, pense que você vai dobrar um arame no formato do gráfico de $y = f(x)$, com x entre a e b: qual deve ser o comprimento do arame?

Exemplo 29.10. Seja $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$, com $x \in [-1,1]$. O comprimento de arco ("comprimento do arame") neste caso é fácil de ser calculado: é π, pois o gráfico de $y = f(x)$ é uma semi-circunferência de raio $r = 1$. ◁

Exemplo 29.11. Seja $y = 2x$, com $x \in [0,5]$. O comprimento de arco ("comprimento do arame") neste caso também é fácil de ser obtido. Como $f(x)$ duplica x, vamos precisar de 10 unidades de arame para fazer o gráfico.
◁

Ok, vamos agora fazer exemplos mais complexos. A ideia é simples: vamos aproximar o gráfico de $y = f(x)$ por vários segmentos de reta, calcular a soma dos comprimentos dos segmentos e daí fazer o tamanho dos segmentos $\to 0$, como nas figuras abaixo.



Esta ideia, de passar para quantidades infinitesimais, é a mesma que utilizamos ao calcular derivadas e também ao calcular integrais.

Sejam $P_0, \ldots, P_n$ pontos no gráfico de $y = f(x)$. O comprimento do gráfico pode ser aproximado pela soma

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} ||P_{i-1}P_i||.$$

Fazendo $n \to \infty$ temos uma aproximação melhor:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||P_{i-1}P_i||.$$

Suponha que os pontos $P_0, \ldots, P_n$ sejam marcados de modo que suas abscissas $x_0, \ldots, x_n$ distem Δx uma da outra. Note que a expressão $||P_{i-1}P_i||$ é da forma

$$||P_{i-1}P_i|| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

com $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Pelo TVM existe $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}),$$

logo

$$||P_{i-1}P_i|| = \sqrt{(\Delta x)^2(1 + (f'(x_i^*))^2)} = \Delta x\sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}.$$

Como o comprimento de arco é dado por

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ||P_{i-1}P_i||,$$

então

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

e esta integral dá o comprimento do gráfico de $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$, desde que $f'(x)$ seja contínua.

Voltemos ao nosso exemplo anterior: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, com $x \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx \\
&= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi
\end{aligned}$$

Outro exemplo: Seja $y = x^2$. Qual o comprimento do gráfico desta função para $x \in [0, 1/2]$?

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \\
&= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx \\
(2x = \tan(\theta)) \quad &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2(\theta)}\, \sec^2(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec^3(\theta)\, d\theta \\
&= \text{Exercício!}
\end{aligned}$$

Exemplo 29.12 (Comprimento de arco)**.** A integral

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

dá o comprimento do gráfico de $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$, desde que $f'(x)$ seja contínua. ◁

Exemplo 29.13. Calcule o comprimento do gráfico de $y = f(x) = x^2 + x$ com x entre 0 e 1. ◁

29.2.1 Área de superfície de revolução

Podemos usar o resultado desta seção para calcular a área de uma superfície de revolução. Se girarmos o gráfico de $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno do eixo x, obteremos uma superfície de revolução. A área desta superfície pode ser calculada pela integral

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Exemplo 29.14. Calcule a área da superfície obtida girando $y = 2x$, com $x \in [1, 2]$, em torno do eixo x. ◁

29.3 Teorema do Valor Médio para Integrais

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável. O TVM para derivadas nos diz que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

ou seja, existe uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ que é paralela à reta secante passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

De forma surpreendente, existe um teorema muito parecido para integrais.

Teorema 29.15 (TVM para integrais)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\, dx,$$

onde o termo do lado direito é chamado de valor médio de f em $[a, b]$.

O nome valor médio vem do fato da integral de $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$ ser uma espécie de "soma" de todos os valores de $f(x)$ neste intervalo, e ao dividirmos pelo tamanho do intervalo obtemos a "média" dos valores de f neste intervalo.

No caso de f positiva, isto significa que existe um ponto $c \in [a, b]$ que a área do retângulo de base $[a, b]$ e altura c é exatamente a mesma que a área abaixo do gráfico de $y = f(x)$ em $[a, b]$. Isto pode ser melhor percebido reescrevendo o TVM como

$$(b - a) \cdot f(c) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

É por isso que o TVM para integrais é chamado de..

Teorema 29.16 (Teorema do caixote)**.** *Regiões abaixo de gráficos de funções contínuas positivas podem ser encaixotadas de forma ótima.*

Exemplo 29.17. Seja $f(x) = x^2 + 2$, com $x \in [0, 2]$. Encontre c tal que

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\, dx.$$

◁

Temos que

$$\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{20}{6}.$$

Assim, resolvendo

$$f(x) = 20/6$$

encontramos $x = 23/20$.

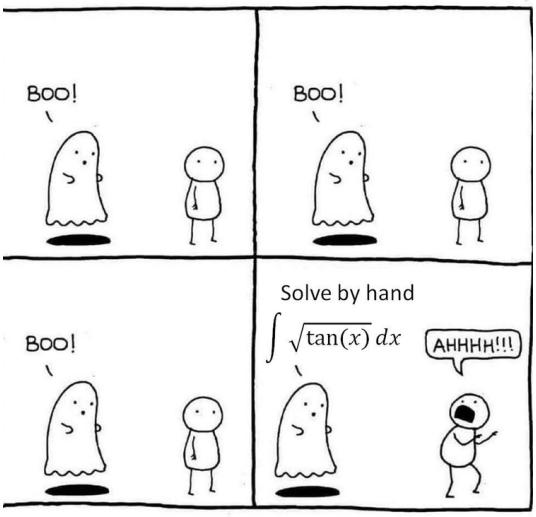
29.4 Uma integral não muito simples

Vamos resolver um último exercício:

Exemplo 29.18. Calcule $\int \sqrt{\tan(x)}\,dx$.

◁

Atenção: é preciso muita coragem para começar!



(Figura da internet, é um meme comum, não lembro de onde peguei.)

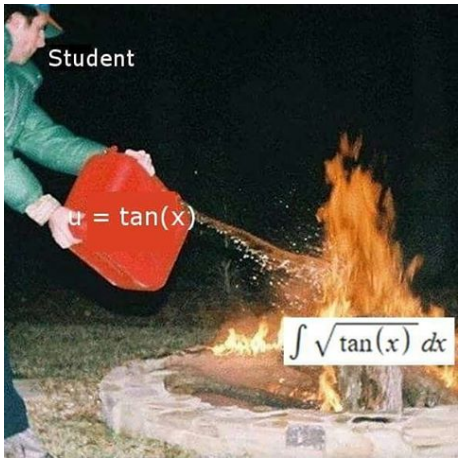
Passados os 4 meses, vamos resolver esta integral. Note que já de cara temos um problema: $\tan(x)$ não é limitada no intervalo $[0, \pi/2]$, logo esta é uma integral imprópria. Assim

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}\,dx = \lim_{r\to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^r \sqrt{\tan(x)}\,dx$$

Vamos focar inicialmente na integral indefinida

$$\int \sqrt{\tan(x)}\,dx.$$

Existem algumas possibilidades para atacar esta integral, e uma delas deu início até a um meme famoso:



(Figura da internet, é um meme comum, não lembro de onde peguei.)

O que não funciona (vide meme): fazer $u = \tan(x)$. Neste caso,

$$du = \sec^2(x)\,dx = (1+\tan^2(x))\,dx = (1+u^2)\,dx \Rightarrow \frac{du}{1+u^2} = dx$$

e a integral se torna

$$\int \sqrt{\tan(x)}\,dx = \int \frac{\sqrt{u}}{1+u^2}\,du$$

Quase conseguimos transformar o integrando numa função racional. Este novo integrando não facilitou muito nossa vida. Parece que deu errado por ter sobrado uma raiz quadrada no numerador.

É aqui que você desiste, entrega o jogo e comete a loucura de tentar uma coisa totalmente inesperada: faça

$$u = \sqrt{\tan(x)}.$$

Sim, isso mesmo: pegue o integrando todo e tente fazer integração por substituição! E é exatamente aqui que a mágica acontece!

Se $u = \sqrt{\tan(x)}$, como no intervalo de integração temos $\tan(x) > 0$ então

$$du = \frac{\sec^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}\,dx = \frac{1+\tan^2(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}\,dx = \frac{1+u^4}{2u}\,dx$$

e com isto

$$\int \sqrt{\tan(x)}\,dx = \int u \cdot \frac{2u}{1+u^4}\,du = \int \frac{2u^2}{1+u^4}\,du.$$

Chegamos na integral de uma função racional e podemos usar frações parciais!

Problema: como fatorar o denominador? Só sabemos usar frações parciais com produtos de polinômios de grau até 2. Queremos decompor

$$\begin{aligned} 1+u^4 &= (au^2+bu+c)(du^2+eu+f) \\ &= cf+(bf+ce)u+(af+be+cd)u^2+(ae+bd)u^3+adu^4. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes temos

$$\begin{aligned} cf &= 1, \\ bf + ce &= 0, \\ af + be + cd &= 0, \\ ae + bd &= 0, \\ ad &= 1. \end{aligned}$$

Note que este sistema não é linear, então vamos usar a estratégia universal de solução de sistemas para os quais nós não conhecemos outra estratégia: o chute.

Utilizando a primeira e a última equação, obtemos rapidamente uma possível solução: $a = c = d = f = 1$. Isto nos deixa um sistema *quase* linear:

$$\begin{aligned} b + e &= 0, \\ 1 + be + 1 &= 0, \\ e + b &= 0. \end{aligned}$$

De $b = -e$, segue $2 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$ e $e = -\sqrt{2}$. Portanto

$$1 + u^4 = (u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1).$$

Note que

$$\frac{2u^2}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)} = 2\frac{u^2(Au + B)}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} + 2\frac{u^2(Cu + D)}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\tan(x)}\, dx &= \int \frac{2u^2}{1 + u^4}\, du \\ &= \int \frac{2u^2}{(u^2 + \sqrt{2}u + 1)(u^2 - \sqrt{2}u + 1)}\, du \\ &= \int 2u^2 \left(\frac{Au + B}{u^2 + \sqrt{2}u + 1} + \frac{Cu + D}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} \right) du \\ &= 2\int \frac{u^2(Au + B)}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\, du + 2\int \frac{u^2(Cu + D)}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}\, du \end{aligned}$$

Note que é fácil encontrar os valores de A, B, C, D: é só juntarmos novamente as frações dentro dos integrandos e resolver o sistema linear obtido igualando os coeficientes. Nós já sabemos fazer isto, né? Agilizando as coisas:

$$A = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + 2\right),\ B = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + 2\right),$$
$$C = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right),\ D = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Vamos deixar só A, B, C, D, afinal somos matemáticos (ou engenheiros) e preferimos letras do que números. Vamos focar nas integrais

$$I = 2\int \frac{u^2(Au + B)}{u^2 + \sqrt{2}u + 1}\, du \text{ e } II = 2\int \frac{u^2(Cu + D)}{u^2 - \sqrt{2}u + 1}\, du.$$

- Resolvendo $I = 2\int \dfrac{u^2(Au+B)}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,du$

Primeiro note que $u^2(Au+B) = Au^3 + Bu^2$ e que

$$u^3 = \left(u-\sqrt{2}\right)\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right) + u + \sqrt{2}$$
$$u^2 = \left(u^2+\sqrt{2}u+1\right) - 1 - \sqrt{2}u$$

Desta forma

$$\frac{u^3}{u^2+\sqrt{2}u+1} = \frac{\left(u-\sqrt{2}\right)\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)+u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1} = u - \sqrt{2} + \frac{u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$
$$\frac{u^2}{u^2+\sqrt{2}u+1} = \frac{\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)-1-\sqrt{2}u}{u^2+\sqrt{2}u+1} = 1 - \frac{1+\sqrt{2}u}{u^2+\sqrt{2}u+1}$$

Assim

$$\begin{aligned} I &= 2A\int \frac{u^3}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,du + 2B\int \frac{u^2}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,du \\ &= 2A\int \left(u-\sqrt{2}+\frac{u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)du \\ &+ 2B\int \left(1-\frac{1+\sqrt{2}u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)du \\ &= Au^2 - 2\sqrt{2}Au + 2A\arctan\left(\sqrt{2}u+1\right) + 2Bu \\ &+ A\ln\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right) - \sqrt{2}B\ln\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right) \end{aligned}$$

Agora resta voltar de u para x com $u = \sqrt{\tan x}$. Vamos guardar este resultado.

- Resolvendo $II = 2\int \dfrac{u^2(Au+B)}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,du$:

Usando a mesma estratégia de antes, resolvemos esta integral e substituindo de u para x, obtendo:

$$\begin{aligned} II &= 2\left(\sqrt{2}C+D\right)\sqrt{\tan(x)} \\ &+ \left(C+\sqrt{2}D\right)\ln\left(-\sqrt{2}\sqrt{\tan(x)}+\tan(x)+1\right) \\ &+ 2C\arctan\left(1-\sqrt{2}\sqrt{\tan(x)}\right) + C\tan(x) \end{aligned}$$

Colocando junto I e II obtemos o resultado a integral indefinida:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\tan(x)}\,dx &= \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{\tan(x)}+1\right)}{\sqrt{2}} - \frac{\arctan\left(1-\sqrt{2}\sqrt{\tan(x)}\right)}{\sqrt{2}} \\ &- \frac{\ln\left(\sqrt{2}\sqrt{\tan(x)}+\tan(x)+1\right)}{2\sqrt{2}} \\ &+ \frac{\ln\left(-\sqrt{2}\sqrt{\tan(x)}+\tan(x)+1\right)}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Agora basta calcular o limite na integral indefinida para obter

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx = \lim_{r \to \pi/2^-} \int_0^r \sqrt{\tan x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Enfim, é isto. Agora sabemos mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Por hoje é só, pessoal!

30 Exercícios: parte III

Exercício 30.1. *Seja* $h(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(e^t)\, dt$. *Calcule* $h(0)$ *e* $h'(x)$.

Exercício 30.2. *Seja* $h(x) = \int_{1-3x}^{x^2} \cos(e^t + 1)\, dt$. *Calcule* $h'(x)$.

Exercício 30.3. *Calcule as integrais*

a) $\int (1 + e^{\cos(x)})\operatorname{sen}(x)\, dx$

b) $\int \sqrt[3]{x} \ln(x)\, dx$

c) $\int \dfrac{\ln(x)}{x((\ln(x))^2 + 2ln(x) - 3)}\, dx$

d) $\int x^{1/3} \ln(x)\, dx$

e) $\int \operatorname{sen}^3(x) \cos^5(x)\, dx$

f) $\int \operatorname{sen}(10x) \cos(15x)\, dx$

g) $\int \dfrac{x+1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\, dx$

Exercício 30.4. *Avalie* $\int_1^3 \dfrac{1}{(2-x)^{4/3}}\, dx$ *e* $\int_1^\infty \dfrac{1}{(x+2)^{1/4}}\, dx$.

Seja R a região entre o gráfico de $y = f(x)$ e o eixo x, com $x \in [a, b]$. Seja S_x o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo x e S_y o sólido obtido rotacionando R em torno do eixo y. Então o volume de S_x é

$$V(S_x) = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx$$

e o volume de S_y é

$$V(S_y) = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx.$$

Exercício 30.5. *Seja* R *a região limitada pelas curvas* $y = 2x^2 + x$ *e* $y = 3x$.

a) Esboce R.

b) Calcule a área de R.

c) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R *em torno do eixo* x.

d) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R *em torno do eixo* y.

Exercício 30.6. *Seja $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$ com $x \in [0,1]$. Seja R a região limitada pelos gráficos de f e g.*

a) Esboce R.

b) Calcule a área de R.

c) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

d) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo y.

Exercício 30.7. *Seja R a região delimitada por baixo pelo gráfico de $y = x^2$ e por cima pela curva $x^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$.*

a) Esboce R.

b) Calcule a área de R.

c) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

d) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo y.

Exercício 30.8 ("A trombeta de Gabriel", ou "A Vuvuzela infinita")**.** *Seja R a região abaixo de $y = 1/x$, com $x \in [1, \infty)$ e S a rotação de R em torno do eixo x. Qual é o volume de S?*

Exercício 30.9. *Seja $f(x)$ definida por*

$$f(x) = \int_x^{3x+1} e^{t^2}\, dt.$$

Calcule $f'(x)$.

Exercício 30.10. *Calcule a integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6}$.

Exercício 30.11. *Resolva até onde conseguir a integral*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(1 + \cos(x))}{1 + \cos(x) + \sin(x)}\, dx.$$

Exercício 30.12. *Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região entre as curvas $y = 4x - x^2$ e $y = x$. Esboce o sólido e a região.*

Exercício 30.13. *Seja $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt$. Mostre que $F(x)$ é de classe C^1 e calcule $F(1)$.*

Exercício 30.14. *Seja $G(x) = \displaystyle\int_1^x (\ln(u))^8\, du$, definida para $x > 0$. Mostre que $G(x)$ é crescente.*

Exercício 30.15. *Seja $H(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} \ln\left(\frac{1+t^8}{1+t^2}\right) dt$. Calcule $F'(0)$.*

Exercício 30.16. *Seja R a região entre os gráficos de $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Seja S_x o sólido obtido girando R em torno do eixo x e S_y o sólido obtido girando R em torno do eixo y. Calcule os volumes de S_x e de S_y.*

Exercício 30.17. *Seja*

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^m(x-8)^n(x-10)^p}.$$

1. *Para $m = 2$, $n = 3$ e $p = 2$, escreva a expansão de $f(x)$ em frações parciais (não precisa calcular os coeficientes).*

2. *Para $m = 1$, $n = 2$ e $p = 0$, resolva $\int f(x)\,dx$.*

Exercício 30.18. *Verifique se*

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,dx$$

é convergente ou divergente.

Exercício 30.19. *Verifique se*

$$\int_1^\infty \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$$

é convergente ou divergente.

Exercício 30.20. *Seja*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| \leq 1, \\ 0 & , \quad |t| > 1. \end{cases}$$

Esboce o gráfico de

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Exercício 30.21. *Resolva as integrais:*

1. $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5-x^2}}$

3. $\int x(\ln(x))^2\,dx$

Referências bibliográficas

[1] H.L. Guidorizzi. Um curso de cálculo, volume 1. LTC, 6 edition, 2018.

[2] H.L. Guidorizzi. Um curso de cálculo, volume 2. LTC, 6 edition, 2018.

[3] J. Stewart. Cálculo, volume 1. Cengage Learning, 9 edition, 2022.

[4] G. F. Simmons. Cálculo com geometria analítica, volume 1. Pearson Universidades, 1 edition, 1996.

[5] P. Boulos. Introdução ao Cálculo, volume 1. Blucher, 2 edition, 1983.

[6] P. Boulos. Introdução ao Cálculo, volume 2. Blucher, 2 edition, 1983.

[7] E. W. Swokowski. Cálculo com geometria analítica, volume 1. Makron Books do Brasil, 2 edition, 1994.

[8] Louis Leithold. O cálculo com geometria analítica, volume 1. Editora Habra, 3 edition, 1994.

[9] Michael Spivak. Calculus. Publish or Perish, fourth edition, 2008.

[10] T. Apostol. Calculus: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra, volume 1. Wiley, 2 edition, 1967.

[11] N. Piskunov. Cálculo diferencial e integral, volume 1. Edições Lopes da Silva, 12 edition, 1988.

[12] N. Piskunov. Cálculo diferencial e integral, volume 2. Edições Lopes da Silva, 12 edition, 1988.

[13] R. Courant. Differential and Integral Calculus, volume 1. Blackie & Son Limited, 2 edition, 1937.

[14] Elon Lages Lima. Curso de Análise. IMPA, 15 edition, 2019.

[15] Djairo Guedes de Figueiredo. Análise I. LTC, 2 edition, 1996.

[16] O. M. Inouye. Introductory calculus for infants. Omionline.CA, 2011.