NOTAS DE AULA
Forma de Jordan e Equações Diferenciais Lineares

Aloisio Freiria Neves[1]

1. Prefácio

O objetivo deste texto é desenvolver de maneira completa a Forma de Jordan e os Sistemas de Equações Diferenciais Lineares. A redação busca utilizar a relação entre esses temas como forma de motivar e facilitar o aprendizado. Os conceitos e as demonstrações são apresentadas de maneira rigorosa e detalhada.

O texto é dirigido à alunos de Graduação, que já cursaram as disciplinas de cálculo e que tenham noções de Álgebra Linear, especificamente noções de bases do $I\!R^n$ e de matrizes de transformações lineares. O texto trata em detalhes tópicos como: multiplicidades algébrica e geométrica de auto valores, polinômio minimal, exponencial de matrizes, teorema de existência e unicidade, entre outros, tópicos que, em geral, são cobertos superficialmente nos cursos de graduação. O texto é útil para leitores que pretendem aprofundar-se um pouco neste tópicos e também para aqueles interessados em áreas como: Sistemas Dinâmicos, Equações Diferenciais de Evolução e Teoria de Semi Grupos de Operadores Lineares.

A bibliografia, no final do texto, contem três livros que foram escolhidos cuidadosamente com o objetivo de direcionar o leitor.

2. Introdução

O tipo mais simples de equação diferencial linear que podemos considerar é a equação do crescimento exponencial: a taxa de crescimento é proporcional à quantidade presente

$$\dot{x} = ax, \qquad a = \text{constante}. \tag{2.1}$$

Quando nos deparamos pela primeira vez com uma equação diferencial as perguntas que aparecem naturalmente são: Existe solução? A solução é única? O que podemos afirmar sobre as soluções? Para a equação acima é fácil ver que a função $x(t) = e^{at}$ é uma solução, bem como qualquer de seus múltiplos $x(t) = e^{at}c$, onde c é uma constante arbitrária. Podemos mostrar que todas as soluções são desta forma. De fato, dada uma solução qualquer $x(t)$ de (2.1), diferenciando a expressão $e^{-at}x(t)$ e usando a equação (2.1), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}x(t)\right) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}\dot{x}(t) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}ax(t) = 0$$

[1]Internet: http://www.ime.unicamp.br/∼aloisio

o que mostra que $e^{-at}x(t) = c$, ou seja $x(t) = e^{at}c$. A expressão $e^{at}c$ é chamada de Solução Geral da equação diferencial (2.1). Para termos unicidade de solução precisamos especificar uma condição inicial, neste caso temos o que chamamos de Problema de Valor Inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Como (2.1) tem uma solução geral, temos, conseqüentemente, que a solução deste P.V.I. deve ser da forma $e^{at}c$. Utilizando-se da condição inicial determinamos a constante c:

$$x(0) = e^{a0}c = c$$

e assim a solução do problema é única e dada por

$$x(t) = e^{at}x(0).$$

Observe que as soluções são funções definidas para todo $t \in I\!R$. Demonstramos, desta forma, um Teorema de Existência e Unicidade para o problema (2.2).

Para o problema não homogêneo:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + h(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

também temos existência e unicidade de solução. Neste caso a solução é dada pela Fórmula de variação da Constantes, isto é, se $x(t)$ é solução de (2.5), então

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}x(t)\right) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}(ax(t) + h(t)) = e^{-at}h(t),$$

integrando esta igualdade de 0 a t, obtemos

$$e^{-at}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-as}h(s)ds$$

e portanto a solução é dada por

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-s)}h(s)ds. \tag{2.4}$$

Esta expressão é conhecida na literatura como Fórmula de variação das Constantes. Estamos supondo que a função $h(t)$ está definida e é contínua num intervalo que contém o ponto $t = 0$, de modo que, a fórmula de variação das constantes garante a existência e unicidade da solução definida, e mostra ainda que a solução está definida no mesmo intervalo que a função $h(t)$.

Um dos objetivos deste texto é generalizar estes resultados para Sistema de Equações Diferenciais Lineares

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0, ; \end{cases} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

onde A é uma matriz constante $n \times n$ e x é uma função diferenciável de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$. Neste caso não temos uma solução que salta aos olhos como no caso escalar (2.2). A intuição nos sugere definir a exponencial e^{At} de uma matriz At, e verificar se as propriedades desta exponencial nos permite generalizar o caso escalar para sistemas. Este e outros resultados serão obtidos através da teoria de Jordan para classificação de matrizes. O texto está dividido da seguinte forma: o capítulo 2 desenvolve a Forma de Jordan e o capítulo 3 estuda os sistemas de equações diferencias lineares.

3. A Forma de Jordan

Neste capítulo desenvolveremos a teoria de Jordan para classificação de matrizes quadradas. O objetivo é determinar uma base no $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz A seja a mais simples possível, tenha o maior número de zeros.

Definição 3.1 *Se existir um interio $r > 0$ tal que $A^r = 0$, então a matriz A é chamadas de* **Nilpotente** *e o menor valor de r tal que $A^r = 0$ é chamado de* **índice de nilpotência** *de A.*

Vamos a um exemplo de matriz nilpotente, considere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

que é uma matriz formada por zeros com exceção da diagonal abaixo da diagonal principal, que é formada por 1's. Quando calculamos A^2 (faça como exercício) a diagonal de 1's escorrega para a diagonal imediatamente abaixo, quando calculamos A^3 a diagonal de 1's vai mais uma para baixo e assim por diante. Como a matriz é de tamanho (ou ordem) k temos que A^{k-1} possui zero em todas as posições exceto na posição $k1$ (última linha com primeira coluna), que tem 1 (a diagonal de 1's está quase saindo fora da matriz), finalmente $A^k = 0$, isto é, a matriz acima é nilpotente de índice k.

A pergunta que se coloca é a seguinte: Será que podemos transformar uma matriz qualquer (através de uma mudança de base) numa expressão que envolva somente matrizes diagonais e matrizes nilpotentes? Com esta pergunta queremos motivar o leitor a estudar o objeto central deste capítulo que é a **Forma de Jordan**. É obvio que só o fato da existência de uma forma canônica envolvendo matrizes com estas propriedades já é por si só motivador e cativador. Além disso, como veremos a seguir, a matriz na Forma de Jordan possui muitos zeros o que certamente é muito mais operacional.

Proposição 3.1 *Se A é nilpotente de índice r, então:*
i) $\lambda = 0$ é o único auto valor de A.
ii) Se $A^{r-1}v_0 \neq 0$, então $\{v_0, Av_0, \cdots, A^{r-1}v_0\}$ é LI.

Demonstração: i) Se $Av = \lambda v$, com $v \neq 0$, então $0 = A^r v = \lambda^r v$, logo $\lambda = 0$.
ii) Seja $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 Av_0 + \cdots + \alpha_{r-1}A^{r-1}v_0 = 0$. Suponha que exista escalar não nulo, chame de α_s o primeiro desses escalares, de modo que a soma acima possa ser escrita como

$$\alpha_s A^s v_0 + \cdots + \alpha_{r-1}A^{r-1}v_0 = 0$$

portanto, como $\alpha_s \neq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} A^s v_0 &= -\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s}A^{s+1}v_0 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s}A^{r-1}v_0 \\ &= A^{s+1}(-\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s}v_0 - \cdots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s}A^{r-s-2}) \end{aligned}$$

portanto $A^s v_0 = A^{s+1}v$, onde v é o vetor escrito entre parênteses na expressão acima, logo temos que

$$A^{r-1}v_0 = A^{r-1-s}(A^s v_0) = A^{r-1-s}(A^{s+1}v) = A^r v = 0$$

que é uma contradição, logo não existe escalar não nulo, e portanto os vetores são linearmente independentes.

Proposição 3.2 *Dada uma transformação linear $A : V \to V$ existem subespaços vetoriais H e K, invariantes por A, tais que*

$$V = H \oplus K$$

com $A_{/_H} : H \to H$ nilpotente e $A_{/_K} : K \to K$ inversível

Demonstração: Temos que

$$KerA \subset KerA^2 \subset \cdots,$$

como V é de dimensão finita, estas inclusões não podem ser próprias, logo existe um menor interio k tal que

$$KerA^k = KerA^{k+1}$$

e é fácil verificar que (use indução sobre j)

$$KerA^k = KerA^{k+j} \quad \text{com} \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

Colocamos

$$H = KerA^k \quad e \quad K = ImA^k$$

temos que $H \cap K = \{0\}$, pois se $v \in H \cap K$ então $A^k v = 0$ e existe $w \in V$ tal que $A^k w = v$, portanto $A^k(A^k w) = 0 \Rightarrow w \in KerA^{2k} = KerA^k \Rightarrow v = A^k w = 0$.
Como $dim(KerA^k) + dim(ImA^k) = dimV$, temos que $V = H \oplus K$.

A verificação que HeK são A-invariantes, $A_{/H}$ é nilpotente de índice k e $A_{/K}$ ínversível pode (e deve) ser feita como exercício.

A **Forma de Jordan** *de um operador A pode ser obtida através das seguintes observações:*

1) O número k dado acima satisfaz

$$k \leq dimH.$$

O caso $k = 0$ acontece quando A é inversível ($KerA^o = KerA$), logo $H = \{0\}$. Quando $k > 0$, basta notar que a sequência $KerA, KerA^2, KerA^3, ...$, cresce de pelo menos 1 em dimensão até k, portanto $k \leq dim(KerA^k)$.

2) Se B é uma base de V formada pela união de bases de H e K, temos que a matriz de A na base B é do tipo

$$[A]_B = \begin{pmatrix} [A_{/H}] & 0 \\ 0 & [A_{/K}] \end{pmatrix}$$

portanto

$$det[A]_B = det[A_{/H}]\ det[A_{/K}].$$

Como $det[A_{/K}] \neq 0$, pois $A_{/K}$ é inversível, temos que a multiplicidade algébrica do zero (a multiplicidade do zero como raiz do polinômio característico de A), é igual a multiplicidade algébrica do zero como raiz do polinômio característico de $A_{/H}$, que é igual a dim H, pois $A_{/H}$ é nilpotente e portanto só possui o zero como auto valor, isto é

$$ma(0) = dimH = dimKerA^k.$$

3) Se λ_1 é auto valor de A com multiplicidade algébrica, $ma(\lambda_1) = m_1$, usando a proposição 3.2 e as observações anteriores à $(A - \lambda_1 I) : V \to V$, temos que $V = H_1 \oplus K_1$, com

$$dimH_1 = m_1 = dimKer(A - \lambda_1 I)^{k_1}$$

onde k_1 é o primeiro inteiro tal que

$$Ker(A - \lambda_1 I)^{k_1} = Ker(A - \lambda_1 I)^{k_1+1}$$

e ainda mais, $(A - \lambda_1 I)_{/H_1}$ é nilpotente de índice k_1 com $k_1 \leq m_1$.
Como $A : K_1 \to K_1$ não possui λ_1 como auto valor, pois $det[(A - \lambda_1 I)_{/K_1}] \neq 0$, podemos repetir o argumento acima para $A : K_1 \to K_1$ tomando um segundo auto valor λ_2 de A e obtendo um segundo subespaço H_2 no qual a restrição de $A - \lambda_2 I$ é nilpotente. Assim sucessivamente, temos para o caso geral em que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\ell$ são os auto valores de $A : V \to V$ com multiplicidades algébricas respectivamente $m_1, m_2, ..., m_\ell$, e portanto seu polinômio característico é igual a

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{m_\ell} \tag{3.1}$$

que, existem subespaços invariantes $H_1, \cdots H_\ell$ tais que:

$$\begin{cases} dimH_i = m_i \\ V = H_1 \oplus \cdots \oplus H_\ell \\ (A - \lambda_i I)_{/H_i} \text{ nilpotente} \end{cases} \tag{3.2}$$

Definição 3.2 *Os sub espaços H_i são chamados de auto-espaços generalizados.*

4) Com base nestes resultados basta analisarmos as transformações nilpotentes, pois se dada uma transformação nilpotente, soubermos encontrar uma base na qual a matriz da transformação é bastante simples, temos usando (3.2) que a matriz de uma transformação qualquer será formada por esses blocos bastante simples, em diagonal.

Suponhamos então que $A : V \to V$ é nilpotente de índice k, sabemos que $\{v, Av, ..., A^{k-1}v\}$ é LI, para algum vetor v. Se $k = dimV$ então está ótimo porque esses vetores formam uma base de V e a matriz de A nessa base é do tipo **Bloco de Jordan**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}$$

Figure 1: Bloco de Jordan

Observe que os números 1's podem aparecer abaixo ou acima da diagonal, basta inverter a ordem da base.

Para o caso em que $k < dimV$ usaremos o seguinte resultado cuja demonstração daremos logo após as observações:

Proposição 3.3 *Se $A : V \to V$ é nilpotente de índice k e $A^{k-1}v_0 \neq 0$, então existe um subespaço M, invariante por A, tal que*

$$V = N \oplus M$$

onde $N = [v_0, Av_0, \cdots, A^{k-1}v_0]$

Logo, quando $k < dimV$, consideramos a restrição de A ao subespaço invariante M, $A : M \to M$, que tambem será nilpotente com índicie de nilpotência $k' \leq k$, portanto com o mesmo raciocínio obtemos um novo conjunto de vetores linearmente independentes, $\{v', Av', \cdots, A^{k'-1}v'\}$. Se $k' = dimM$ ótimo, encerramos o processo e

$$\{v, Av, \cdots, A^{k-1}v, v', Av', \cdots, A^{k'-1}v'\}$$

é uma base na qual a matriz de A é formada por dois blocos de Jordan em diagonal. Utilizando-se desse procedimento podemos concluir, de modo geral, que se A é nilpotentes de índice k, existe uma base na qual sua matriz é bastante simples, formada por blocos de Jordan em diagonal, do tipo:

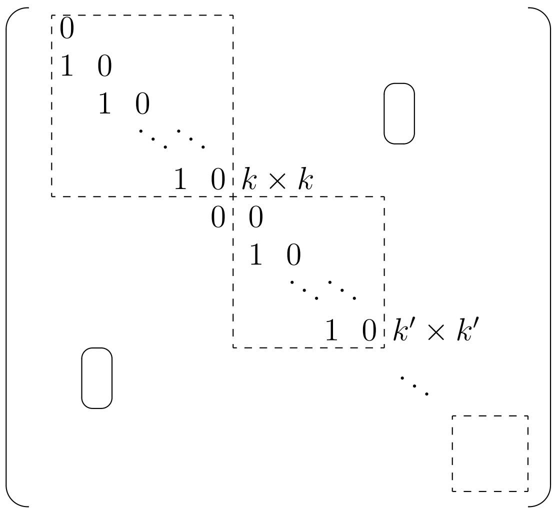


Figure 2: Forma de Jordan de um Operador Nilpotente

onde $k \geq k' \geq \cdots$, isto é, os blocos em diagonal vão decrescento (em ordem) e são todos do tipo figura 1.

5) Conforme (3.2), temos que o operador $(A - \lambda_i I)_{/H_i}$ é nilpotente, logo sua matriz é do tipo da figura 2, com índice de nilpotência k_i. Como a matriz de $A_{/H_i}$ é a soma dessa matriz com a matriz diagonal $\lambda_i I$, temos que a matriz de $A_{/H_i}$ é do tipo figura 2, mas com λ_i na diagonal em vez de zeros.
Agora, como V é a soma direta dos subespaços H_i, temos que a matriz de A é uma matriz formada por blocos em diagonal

onde cada bloco é do tipo figura 2 com o respectivo auto valor λ_i na diagonal e sua ordem é a multiplicidade algébrica de λ_i, m_i.

A forma matricial assim obtida é chamada de Forma de Jordan do operador A. Para completarmos a sua justificativa falta apenas a demonstração da proposição 3.3. Daremos uma demonstração dessa proposição logo a seguir e encerraremos essas notas com algumas aplicações e mais algumas propriedades que certamente lhe serão muito úteis

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_{/H_1}} & & & \\ & \boxed{A_{/H_2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_{/H_\ell}} \end{pmatrix}$$

Figure 3: Forma de Jordan

Demonstração da proposição 3.3: Demonstraremos por indução sobre o índice k de nilpotência do operador $A : V \to V$.
Se $k = 1$, então $A = 0$ e o resultado é imediato.
Suponhamos a proposição verdadeira para $k-1$ e vamos demonstrá-la para k. Temos que ImA é um subespaço invariante e $A_{/ImA}$ é nilpotente de índice $k-1$, pois

$$A^{k-1}(Av) = A^k v = 0 \quad \text{e} \quad A^{k-2}(Av_0) = A^{k-1}v_0 \neq 0$$

portanto pela hipótese de indução

$$ImA = N_1 \oplus M_1 \quad \text{com} \quad N_1 = [Av_0, \cdots, A^{k-1}v_0] = A(N).$$

Colocando

$$M_2 = \{v \in V : Av \in M_1\}$$

temos que

$$V = N + M_2, \quad onde \quad N = [v_0, Av_0, \cdots, A^{k-1}v_0] \tag{3.3}$$

de fato, $v \in V \Rightarrow Av \in ImA = N_1 \oplus M_1 \Rightarrow Av = n_1 + m_1$ com $n_1 \in N_1$ e $m_1 \in M_1$ portanto $n_1 = An$ para algum $n \in N$, logo $Av = An + m_1 \Rightarrow A(v-n) = m_1 \in M_1$ donde concluimos que $(v-n) \in M_2$ e claramente $v = n + (v-n) \in N + M_2$.
A soma em (3.3) não é direta já que

$$N \cap M_2 = [A^{k-1}v_0] \subset N_1.$$

Observe que $M_1 \subset M_2$, e logicamente $N \cap M_2 \subset M_2$ portanto

$$(N \cap M_2) \oplus M_1 \subset M_2$$

logo podemos completar esse subespaço $(N \cap M_2) \oplus M_1$ com um subespaço M_3 de modo a obter M_2, isto é,

$$M_2 = (N \cap M_2) \oplus M_1 \oplus M_3. \tag{3.4}$$

Colocamos então
$$M = M_1 \oplus M_3$$
e temos:
i) $M \subset M_2$, logo $A(M) \subset A(M_2) \subset M_1 \subset M$ donde concluimos que M é invariante.
ii) $N \cap M = \{0\}$, pois se $v \in N \cap M \Rightarrow v \in N$ e $v \in M \subset M_2 \Rightarrow v \in N \cap M_2$ portanto
$$v \in M \cap (N \cap M_2) = \{0\}$$
por (3.4).
iii) $V = N \oplus M$ porque $V = N + M_2$ e $M_2 = N \cap M_2 \oplus M$, logo $v = n + (h + m)$ com $n \in N$, $h \in N \cap M_2$ e $m \in M$, mas então
$$v = (n + h) + m \quad \text{com} \quad (n + h) \in N, \quad m \in M$$
o que completa a prova.

Comentários e propriedades complementares sobre a Forma de Jordan:

O objetivo aqui é como determinar a forma de Jordan de um operador arbitrário A. Para cada auto valor λ_i, de A vamos calcular a forma de Jordan do operador nilpotente $(A - \lambda_i I)_{/H_i}$, onde $H_i = Ker(A - \lambda_i I)^{k_i}$. Essa matriz possui o primeiro bloco de Jordan de tamanho (ordem) $k_i \times k_i$, e possivelmente outros blocos menores ou iguais em diagonal; a quantidade desses blocos e seus respectivos tamanhos depende logicamente do operador A. A questão que queremos discutir aqui é: Como determinar essa quantidade e esses tamanhos (ou ordens)?

Observe primeiramente que os números k_i são índices de nilpotência de $(A - \lambda_i I)$, isto é, o menor inteiro tal que $(A - \lambda_i I)^{k_i} = 0$ em H_i e $k_i \leq m_i$. Portanto considerando o polinômio
$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_\ell)^{k_\ell}$$
temos que $p(\lambda)$ tem coeficiente principal igual a 1, tem grau menor ou igual ao polinômio característico (3.1) e $p(A) = 0$, porque se $v \in V$, $v = v_1 + \cdots + v_\ell$ com $v_i \in H_i$ veja (3.2),
$$\begin{aligned} p(A) \;&=\; (A - \lambda_2 I)^{k_2} \ldots (A - \lambda_\ell I)^{k_\ell} \overbrace{(A - \lambda_1 I)^{k_1} v_1}^{=0} + \cdots \\ &\quad + (A - \lambda_1 I)^{k_1} \cdots \underbrace{(A - \lambda_\ell I)^{k_\ell} v_\ell}_{=0} = 0 \end{aligned}$$
observe também que se diminuirmos um desses k_i não temos mais essa propriedade $p(A) = 0$, portanto $p(\lambda)$ é o polinômio minimal de A, isto é, o polinômio de menor grau com coeficiente principal $= 1$ e tal que $p(A) = 0$.
Uma outra observação importante é que na "diagonal" abaixo da diagonal principal da

Forma de Jordan do operador nilpotente $(A - \lambda_i I)_{/H_i}$ os 0's aparecem exatamente na posição de intersecção dos blocos de Jordan, veja a figura 2, logo se olharmos para as colunas nulas dessa matriz (figura 2), temos tantas colunas nulas quantos forem os seus blocos (a última coluna dessa matriz é nula, que corresponde ao último bloco), portanto para determinarmos o número de blocos correspondentes a λ_i devemos calcular o número de colunas nulas, mas esse número é exatamente a dimensão de $Ker(A - \lambda_i I)$.

Definição 3.3 *A dimensão de $Ker(A - \lambda_i I)$ é chamada de multiplicidade geométrica de λ_i.*

Temos portanto informações sobre a ordem do maior bloco de Jordan e sobre o número de blocos existentes para cada λ_i. Falta somente informações sobre a ordem desses blocos. Para isto chamaremos de N a dimensão do espaco V e colocaremos:

$$T = (A - \lambda_i I),$$

$$d_j = dimKerT^j = dimKer(A - \lambda_i I)^j$$

e

$$n_j = \text{número de blocos de Jordan de ordem } j \times j.$$

Observe que devemos calcular as dimensões d_j até obtermos o primeiro inteiro k tal que $d_k = d_{k+1}$, que é o índice de nilpotência do auto valor λ_i, a partir desse índice temos, $d_j = d_k,\ j \geq k$. Observe ainda que

$$d_0 = dimKer\mathrm{I} = 0.$$

Sabemos que o número de blocos é igual a multiplicidade geométrica, logo

$$d_1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_N$$

que são todas as ordens possíveis.
Agora, quando calculamos T^2 a "diagonal" de 1's escorrega para a "diagonal" imediatamente abaixo, veja figura 2, isto significa que nos blocos de Jordan de ordens ≥ 2 aumenta uma coluna de zeros em cada um, logo

$$d_2 = n_1 + 2n_2 + \cdots + 2n_N.$$

Com o mesmo raciocínio concluimos para os subsequentes, isto é,

$$\begin{aligned}
d_3 &= n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + 3n_N = n_1 + 2n_2 + 3(n_3 + \cdots + n_N),\\
&\vdots\\
d_{N-1} &= n_1 + 2n_2 + \cdots + (N-2)n_{N-2} + (N-1)(n_{N-1} + n_N),\\
d_N &= n_1 + 2n_2 + \cdots + Nn_N,\\
d_{N+1} &= d_N.
\end{aligned}$$

Os d_i's são conhecidos (já foram calculados), vamos resolver para os n_i's. Subtraindo cada equação da anterior obtemos:

$$\begin{aligned} d_1 - d_0 &= n_1 + \cdots + n_N \\ d_2 - d_1 &= n_2 + \cdots + n_N \\ &\vdots \\ d_N - d_{N-1} &= n_N \\ d_{N+1} - d_N &= 0. \end{aligned}$$

Subtraindo cada equação da subsequente, vem

$$\begin{aligned} -d_0 + 2d_1 - d_2 &= n_1 \\ &\vdots \\ -d_{N-1} + 2d_N - d_{N+1} &= n_N. \end{aligned}$$

Obtemos portanto a relação

$$\boxed{n_j = -d_{j-1} + 2d_j - d_{j+1}, \qquad 1 \leq j \leq N} \tag{3.5}$$

que fornece o número de blocos de Jordan de ordem $j \times j$ correspondentes ao auto valor λ_i.

Vamos a um exemplo: Suponhamos que $\lambda_1 = 5$ seja auto valor de um operador A que satisfaz as seguintes condições:

- multiplicidade algébrica $= 10$
- multiplicidade geométrica $= 6$, isto é, $d_1 = dimKer(A - 5I) = 6$
- ındice de nilpotência $= 3$, isto é, $d_j = d_3 = 10$ para $j \geq 3$
- e $d_2 = 9$.

portanto podemos tirar as seguintes conclusões

- O bloco tem o valor 5 na diagonal (5 é o auto valor).
- A ordem do bloco é $= 10 \times 10$ (10 é a multiplicidade algébrica).
- O maior bloco de Jordan é 3×3 (3 é o índice de nilpotência).
- Possui 6 blocos de Jordan (6 é a multiplicidade geométrica).

Falta somente as ordens dos blocos e a quantidade de cada um deles. Para isto usamos a fórmula (3.5), e obtemos:

$$\begin{array}{rcl} n_1 & = & -d_0 + 2d_1 - d_2 = 0 + 12 - 9 = 3, \\ n_2 & = & -d_1 + 2d_2 - d_3 = -6 + 18 - 10 = 2, \\ n_3 & = & -d_2 + 2d_3 - d_4 = -9 + 20 - 10 = 1. \end{array}$$

Logo, o bloco correspondente ao auto valor 5 é:

$$\begin{pmatrix} 5 & & & & & & & & & \\ 1 & 5 & & & & & & & & \\ & 1 & 5 & & & & 0 & & & \\ & & 0 & 5 & & & & & & \\ & & & 1 & 5 & & & & & \\ & & & & 0 & 5 & & & & \\ & & & & & 1 & 5 & & & \\ & & 0 & & & & 0 & 5 & & \\ & & & & & & & 0 & 5 & \\ & & & & & & & & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Quando o operador A possui auto valores complexos, $\lambda = \alpha + \beta i$ a forma de Jordan obtida pelo processo descrito acima é complexa e os auto valores são complexos conjugados. Nesse caso o operador A deve ser considerado sobre C^N e a forma de Jordan pode ser utilizada normalmente com os mesmos objetivos. Agora se isto lhe importunar e você deseja obter também nesse caso uma matriz real, podemos proceder da seguinte forma:
Vamos denotar por λ o auto valor com parte imaginária positiva e por $\bar{\lambda}$ seu conjugado. Se

$$\{v_1, \cdots, v_k\} \quad onde \quad v_j = x_j + iy_j$$

denota a base do auto espaço generalizado correspondente a λ, temos que

$$\{\bar{v_1}, \cdots, \bar{v_k}\}, \quad \bar{} = \text{conjugado}$$

é a base correspondente a $\bar{\lambda}$, logo esses $2k$ vetores são linearmente independentes sobre o corpo dos números complexos C, e portanto

$$\{y_1, x_1, \cdots y_k, x_k\}$$

são $2k$ vetores linearmente independentes sobre $I\!R$. Isto segue das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} & a_1x_1 + b_1y_1 + \cdots + a_kx_k + b_ky_k \\ & \quad = \frac{a_1}{2}(v_1 + \bar{v_1}) + \frac{b_1}{2i}(v_1 - \bar{v_1}) + \frac{a_k}{2}(v_k + \bar{v_k})\frac{b_k}{2i}(v_m - \bar{v_k}) \\ & \quad = (\frac{a_1}{2} + \frac{b_1}{2i})v_1 + \cdots + (\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i})v_k \\ & \quad +(\frac{a_1}{2} - \frac{b_1}{2i})\bar{v_1} + \cdots + (\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i})\bar{v_k}. \end{aligned}$$

Agora como $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é a base do auto espaço generalizado na qual A está na forma de Jordan, temos, para $1 \leq j < k$, que

$$\begin{aligned} Av_j = Ax_j + iAy_j &= \lambda v_j + v_{j+1} \\ &= (\alpha x_j - \beta y_j + x_{j+1}) + i(\beta x_j + \alpha y_j + y_{j+1}) \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} Ay_j &= \alpha y_j + \beta x_j + 1y_{j+1} + 0x_{j+1} \\ Ax_j &= -\beta y_j + \alpha x_j + 0y_{j+1} + 1x_{j+1}, \end{aligned}$$

podemos concluir portanto, que a matriz de A na forma de Jordan real (na base formada por blocos de vetores do tipo $\{y_1, x_1, \cdots y_k, x_k\}$, nessa ordem), é uma matriz formada por blocos em diagonal da forma (Verifique):

$$\begin{pmatrix} D & & & & \\ I & D & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I & D \end{pmatrix} \qquad ou \qquad D$$

onde

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Sistemas Lineares 2×2

Podemos utilizar a Forma de Jordan que acabamos de justificar para classificar os sistemas 2×2 de equações diferenciais. Como vimos as matrizes 2×2 são das seguintes formas:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

portanto resolvendo os sistemas correspondentes as estas matrizes estaremos conhecendo todas as possíveis soluções. Faremos esta análise de maneira detalhada para que tenhamos a noção exata do comportamento dessas soluções.

No primeiro caso temos λ e μ reais e distintos; as equações na base de Jordan ficam desacopladas e são dadas por

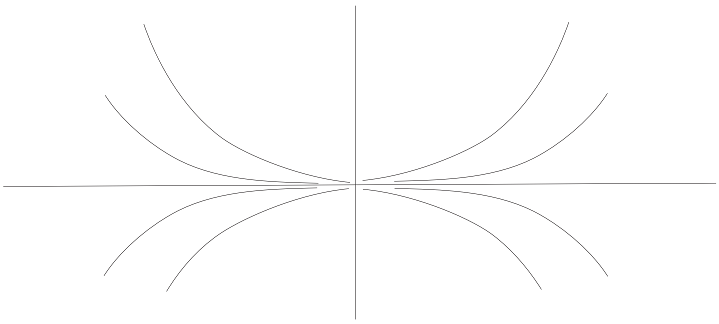
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases}$$

e portanto $x(t) = c_1 e^{\lambda t}$ e $y(t) = c_2 e^{\mu t}$, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, são as soluções. As curvas $(x(t),\ y(t))$, parametrizadas pelo parâmetro t, são denominadas órbitas. Observe que $(x(t),\ y(t))$ são as coordenadas das soluções na base de Jordan, que neste caso é formada pelos auto vetores v_λ e v_μ da matriz A correspondentes aos auto valores λ e μ. Portanto as soluções em relação à base canônica são dadas por

$$c_1 v_\lambda e^{\lambda t} + c_2 v_\mu e^{\mu t}.$$

Esta expressão justifica o método do auto valor e auto vetor utilizado para obtenção de soluções e estudado nos cursos de cálculo.

A representação gráfica das órbitas, usualmente chamada de retrato de fase, é obtida facilmente, depende dos auto valores e dos auto vetores. Quando os auto valores são ambos negativos, temos que as soluções tendem à origem quando $t \to +\infty$, neste caso dizemos que a origem é um ponto nodal estável, e quando são ambos positivos as soluções tendem a zero quando $t \to -\infty$ e a origem é chamada de ponto nodal instável. Nestes dois casos o retrato de fases tem a forma



Ponto Nodal

Na figura acima as curvas tangenciam o eixo horizontal, que é o eixo que está na direção do auto vetor v_λ. Para identificarmos esse eixo, isto é, se v_λ corresponde ao maior ou ao menor auto valor da matriz A, podemos analisar o que ocorre com o coeficiente angular das tangentes às órbitas. Supondo que $x = x(t)$ pode ser invertida, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = c\ \frac{y(t)}{x(t)} = c\ e^{(\mu-\lambda)t},$$

onde c representa constantes arbitrárias. Quando os auto valores são ambos negativos, para dy/dx tender a zero quando $t \to +\infty$ como está na figura, é preciso que $\mu - \lambda < 0$ ou $|\lambda| < |\mu|$, ou seja, o eixo de tangencia das soluções é o eixo na direção do auto vetor correspondente ao menor auto valor (em valor absoluto). Esta conclusão vale também para o caso em que os auto valores são ambos positivos (verifique).

Desta forma podemos obter o retrato de fases do sistema somente conhecendo seus auto valores e auto vetores, veja o exemplo a seguir

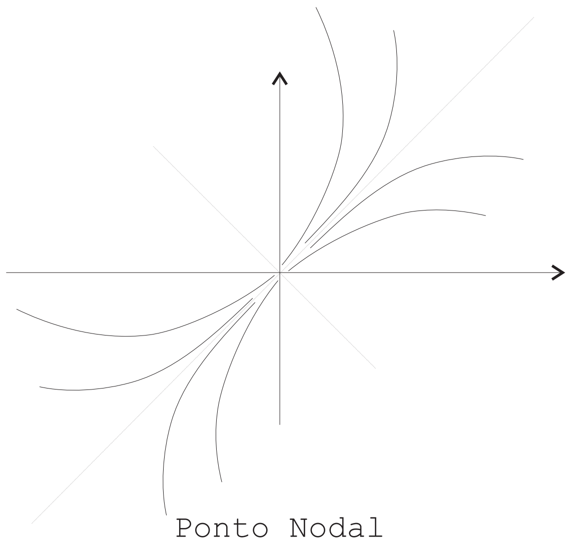
Exemplo: Considere o sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} &=& -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \dot{y} &=& \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y \end{cases}$$

Neste exemplo temos

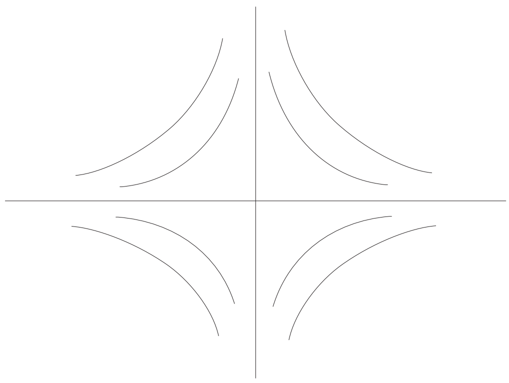
$$A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

que possui auto valores -1 e -2, com auto vetores $(1,\ 1)$ e $(1,\ -1)$, respectivamente. Portanto, o retrato de fase tem a forma abaixo; o eixo de tangencia é o eixo na direção do auto vetor associado ao -1, ou seja, o retrato de fases em relação à base canônica, tem a seguinte forma



Ponto Nodal

Quando os auto valores têm sinais distintos é fácil ver que as órbitas são da forma



Ponto de Sela

Dizemos neste caso que a origem é um ponto de sela

No segundo caso λ tem multiplicidade algébrica e geométrica igual a dois. A Análise do plano de fases é análogo ao caso anterior, as órbitas são semi retas.

No terceiro caso λ tem multiplicidade algébrica 2 e geométrica 1. Neste caso as equações são

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x \\ \dot{y} = x + \lambda y. \end{cases}$$

Podemos resolver a primeira equação $x(t) = c_1 e^{\lambda t}$ e substituir na segunda obtendo

$$\dot{y} = \lambda y + c_1 e^{\lambda t}.$$

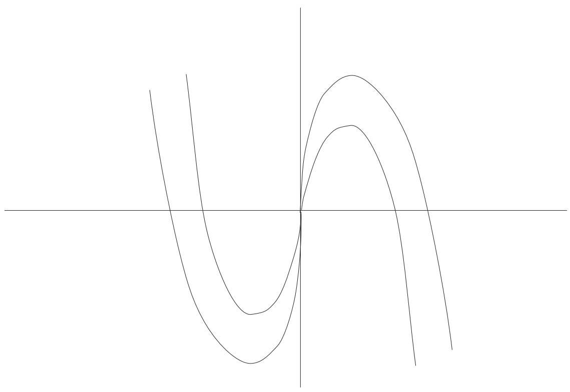
Esta última equação pode ser resolvida pela fórmula da variação da constantes (2.4), obtendo

$$y(t) = e^{\lambda t} c_2 + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} e^{\lambda s} ds = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}.$$

Portanto as soluções têm a forma

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}. \end{cases}$$

Para determinarmos o formato dessas curvas, suponha que $\lambda < 0$ e que $c_1 > 0$, os outros casos seguem por simetria. Temos que $x(t) > 0$, isto é, as soluções neste caso permanecem no primeiro e no quarto quadrantes, se aproximam da origem quando $t \to \infty$, e quando $t \to -\infty$, temos que $x(t) \to \infty$ e $y(t) \to -\infty$. Temos ainda que $y(t) > 0$ para $t > -c_2/c_1$ e a curva tangencia o eixo y, pois $\dot{x}/\dot{y} = c_1/(c_1 t + c_2) \to 0$, quando $t \to \infty$, portanto o retrato de fases tem a forma



Ponto nodal

O próximo caso e último caso os auto valores são complexos, $\lambda = \alpha \pm \beta i$ o sistema se torna

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta y \\ \dot{y} = \alpha x + \beta y. \end{cases}$$

Neste caso é preferível usar coordenadas polares

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

portanto

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\ \dot{\theta}, \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\ \dot{\theta} \tag{4.1}$$

que pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

invertendo a matriz obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{-1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

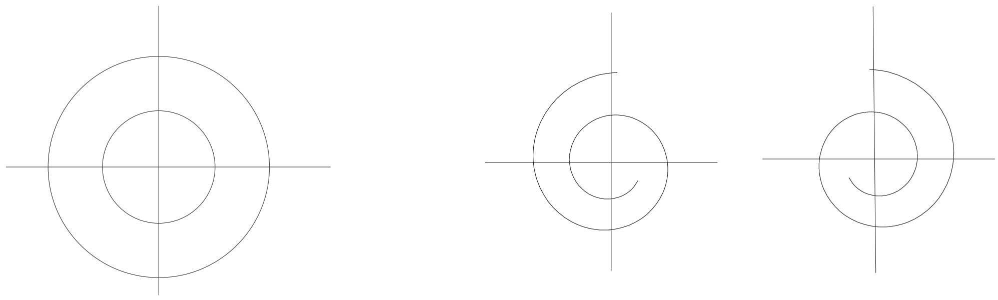
substituindo $\dot{x}$ e $\dot{y}$ pelos valores dados no sistema 4.1 e lembrando que x e y estão em coordenadas polares, obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases}$$

e daí

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \qquad \theta(t) = \beta t + \theta_0,$$

portanto, se $\alpha = 0$, temos que r é constante, a órbita é um círculo, a origem é chamada de centro; se $\alpha \neq 0$ a órbita é uma espiral logarítmica, a origem é chamada de ponto espiral. A espiral tende à origem se $\alpha < 0$ e se afasta da origem caso contrário. O sentido de rotação depende do sinal de β, quando $\beta > 0$ o sentido é horário (dextrógira) e quando$\beta < 0$ o sentido é anti horário (sinistrógira). As órbitas são portanto das seguintes formas:



$\alpha = 0$ Centro Pontos Espirais

5. Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Motivados pelo caso escalar comentado na introdução, vamos iniciar este capítulo definindo a exponencial $exp(A) = e^A$ de uma matriz quadrada $A_{n\times n} = (a_{ij})$. A esperança é que com essa definição possamos estender os resultados de existência, unicidade e a fórmula de variação das constantes, para os sistemas de equações diferenciais. Em particular, mostrar que $x(t) = e^{At}x_0$ é a solução do sistema de n-equações diferenciais lineares,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{5.1}$$

que satisfaz a condição inicial

$$x(0) = x_0 \in I\!R^n \tag{5.2}$$

Imitando o caso escalar

$$exp(a) = e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots \tag{5.3}$$

vamos definir a exponencial da matriz A por meio da série

$$exp(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots \tag{5.4}$$

É preciso mostrar que essa série é convergente no espaço $\mathcal{L}(I\!R^n)$ das matrizes $n \times n$ (ou dos operadores lineares de $I\!R^n$ em $I\!R^n$). Para isto, vamos definir uma norma apropriada.

Se $< \, , \, >$ e $| \quad |$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma usuais do $I\!R^n$, isto é,

$$< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \quad e \quad |x| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

se

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \quad e \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \quad \in I\!R^n$$

definimos a norma de um operador linear $A : I\!R^n \to I\!R^n$ por

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{x \neq 0} |A(\frac{x}{|x|})| = \sup_{|x|=1} |Ax|. \tag{5.5}$$

Para que essa definição realmente defina uma norma, vamos primeiramente observar que esse supremo é finito. Esta propriedade pode ser obtida utilizando-se do seguinte resultado de Análise: toda função contínua definida num conjunto compacto é limitada; neste caso Ax é contínua (sua representação matricial envolve somente expressoões contínuas) e está definida em $\{x : |x| = 1\}$ que é compacto de $I\!R^n$, e portanto o supremo é finito; ou utilizando-se somente de argumentos de álgebra linear da seguinte forma: Se $a_1 = (a_{11}, \cdots a_{1n}), \cdots, a_n = (a_{n1}, \cdots a_{nn})$ são as linhas da matriz A, de modo que

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

temos que o produto da matriz A por um vetor $x \in I\!R^n$ é dado por

$$Ax = \begin{pmatrix} < a_1, x > \\ \vdots \\ < a_n, x >) \end{pmatrix}$$

portanto, usando a desigualdade de Schwartz $(| < x, y > | \leq |x| \; |y| \;)$, temos que

$$|Ax| = |(< a_1, x >, \cdots, < a_n, x >)| = (< a_1, x >^2 + \cdots + < a_n, x >^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq (|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} |x|.$$

portanto

$$\frac{|Ax|}{|x|} \leq (|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall x \neq 0 \tag{5.6}$$

o que justifica que o supremo é finito. A justificativa das demais propriedades necessárias para que (5.5) seja uma norma,

$$\begin{array}{ll} (i) & \|A\| \geq 0, \ \text{ e } \ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ (ii) & \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \ \ \alpha \in I\!R \\ (iii) & \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \end{array}$$

serão deixadas para o leitor.

O Espaço vetorial das matrizes $n \times n$, $\mathcal{L}(I\!R^n)$, pode ser considerado como o espaço $I\!R^{n^2}$ e a norma definida em (5.5) é equivalente a norma usual de $I\!R^{n^2}$ (dada pela raiz quadrada dos quadrados de seus elementos), pois de (5.6) temos que

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} \leq (\sum a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} = |(a_{ij})|$$

e, por outro lado, denotando por $e_1, \cdots e_n$ a base canônica do $I\!R^n$, temos que

$$|Ae_i| = (a_{1i}^2 + \cdots + a_{ni}^2)^{\frac{1}{2}}$$

portanto

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| \geq (a_{1i}^2 + \cdots + a_{ni}^2)^{\frac{1}{2}}, \ \ \forall i.$$

Somando, para $i = 1, ..., n$, obtemos

$$n\|A\| \geq (\sum a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} = |(a_{ij})|., \tag{5.7}$$

que mostra a equivalência das duas normas. Observe que usamos aqui a desigualdade $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$.

As desigualdades (5.6) e (5.7) mostram que a norma $\| \ \ \|$ é equivalente à norma usual do $I\!R^{n^2}$, isto é, temos que

$$\frac{1}{n} \, |(a_{ij})| \leq \|A\| \leq |(a_{ij})|.$$

Temos que $\mathcal{L}(I\!R^n)$ é uma espaço vetorial completo e a vantagem em considerar a norma $\| \ \ \|$ em vez da norma usual é que nesta norma temos a desigualdade

$$\|Ax\| \leq \|A\| |x|, \tag{5.8}$$

a constante $\|A\|$ é a menor constante tal que essa desigualdade é verdadeira.

Utilizando-se dessa desigualdade temos que

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

e particularmente,

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n, \tag{5.9}$$

que é a desigualdade que iremos utilizar na justificativa da convergência da série da exponencial e^A

Para que a série (5.4) defina a matriz e^A é preciso que seja convergente. Para isto observe que usando a desigualdade (5.9) temos para $p > 0$ que:

$$\|\frac{A^n}{n!} + \cdots + \frac{A^{n+p}}{(n+p)!}\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!} + \cdots + \frac{\|A\|^{n+p}}{(n+p)!}$$

e essa última expressão é formada por termos da série da função exponencial (5.3) que converge para todo real, em particular para $a = \|A\|$, portanto a série $exp(A)$ é uma série de Cauchy $\mathcal{L}(I\!R^n)$ e portanto convergente. Ainda mais, de modo análogo às funções reais, podemos justificar que a candidata à solução do sistema de equações lineares:

$$exp(At)x_0 = e^{At}x_0 = e^{At}x_0 = x_0 + Atx_0 + \frac{A^2t^2}{2!}x_0 + \frac{A^3t^3}{3!}x_0 + ...$$

pode ser derivada em t, com derivada satisfazendo:

$$\frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0$$

isto é, $x(t) = e^{At}x_0$, está bem definida, satisfaz a equação (5.1) e a condição inicial (5.2), temos então, de modo análogo ao problema escalar, existência, unicidade de solução. Vale também a fórmula de variação das constantes, isto é, a solução do sistema não homogêneo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + h(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{5.10}$$

é dada por

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}h(s)ds. \tag{5.11}$$

A definição da exponencial da matriz A resolveu o P.V.I. (5.1) - (5.2), porém a dificuldade computacional permanece, pois dada uma matriz A para calcularmos e^A através de (5.4) precisamos conhecer todas as potências de A, o que é impossível de modo geral. Em casos particulares, como por exemplo, quando A é uma matriz diagonal, não é difícil verificar que a exponencial de A também é diagonal, com diagonal formada pela exponencial dos elementos da diagonal de A (verifique como exercício), ou quando A é nilpotente, isto é, existe $r > 0$ tal que $A^r = 0$, temos nesse caso que a série (5.4) se torna uma soma finita, e portanto podemos perfeitamente (se estivermos dispostos) calcularmos todos os termos dessa soma. Desse modo podemos utilizar a Forma de Jordan para o cálculo desta exponencial

Temos que $x(t) = \mathrm{e}^{At}x_0$ é a solução do problema de condição inicial (5.1), (5.2). Para calcularmos a expressão de e^A, vamos primeiramente verificar algumas propriedade dessa

exponencial:
1. Se M é uma matriz inversível então

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^{A}M$$

isto decorre do fato que

$$(M^{-1}AM)^{j} = M^{-1}A^{j}M.$$

2. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad A$ comuta com B
Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ temos derivando ambos os lados que :

$$(A+B)e^{(A+B)t} = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}$$

derivando novamente e fazendo $t = 0$, obtemos

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

que implica que $AB = BA$.
($\Leftarrow$) Se A comuta com B é fácil ver que $X(t) = e^{At}e^{Bt}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{X}(t) = (A+B)X(t)$ com condição inicial $X(0) = I$, então pela unicidade de solução devemos ter $X(t) = e^{(A+B)t}$, e a propriedade está justificada.

Se M é a matriz de mudança de base tal que $M^{-1}AM$ está na forma de Jordan

$$M^{-1}AM = diag[A_1, \cdots, A_\ell], \quad A_i = \lambda_i + R_i$$

onde R_i é do tipo figura 1, então, como

$$M^{-1}e^{At}M = e^{M^{-1}AMt},$$

temos que

$$e^{At} = Me^{M^{-1}AMt}M^{-1}.$$

Vamos portanto calcular a matriz $e^{M^{-1}AMt}$. Temos que $e^{M^{-1}AMt}$ é diagonal de blocos do tipo:

$$e^{(\lambda I+R)t}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k\times k}.$$

Como λI comuta com R temos que

$$\begin{aligned} e^{\lambda I+R)t} &= e^{(\lambda I)t}e^{Rt} = e^{\lambda t}e^{Rt} \\ &= e^{\lambda t}\left(I + Rt + \frac{R^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1}\right) \end{aligned}$$

$$= e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ t & 1 & & & & \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & & \cdots & t & 1 \end{pmatrix}_{k\times k}.$$

Observe que $e^{\lambda t}$ está multiplicando a matriz, portanto podemos concluir que:
1. Os auto valores da exponencial e^{At} são todos do tipo $e^{\lambda t}$, com λ auto valor de A.
2. Os elementos de e^{At} são combinações lineares de termos do tipo $t^j e^{\lambda t}$, com j limitado pelos índices de nilpotência, no caso acima $j \leq k$, logo são do tipo $p(t)e^{\lambda t}$, onde $p(t)$ é um polinômio em t.

6. Execícios

1. Encontre a Forma de Jordan das seguinte matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Determine a exponencial das matrizes acima

   (b) Faça o esboço do plano de fases dos sistemas dados por essas matrizes

3. Determine a solução do Problema de Valor Inicial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Duas matrizes A, e B são chamadas de similares de existe uma matriz inversível M tal que
$$A = M^{-1}BM$$
   Mostre que:

   (a) Duas matrizes são similares se, e somente se, possuem forma de Jordan iguais

   (b) Toda matriz é similar a sua transposta.

   (c) Toda matriz real com determinante negativo é diagonalizavel (similar a uma matriz diagonal)

5. Sejam $h_1(t)$ e $h_2(t)$ funções contínuas e periódicas de período 2π. Dê uma condição, necessária e suficiente, para que todas as soluções do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \quad y + h_1(t) \\ \dot{y} &= -x + h_2(t) \end{aligned}$$

sejam periódicas de período 2π.
Sugetão. Justifique e use o seguinte resultado: se h é contínua e periódica de período 2π, então $H(t) = \int_0^t h(s)\, ds$ é periódica de período 2π se, e somente se, $\int_0^{2\pi} h(s)ds = 0$

6. Seja A uma matriz $n \times n$ e $x(t),\ y(t) \in I\!\!R^n$, mostre que:

   (a)

$$\frac{d}{dt}\langle x(t),\ y(t)\rangle = \langle \dot{x}(t),\ y(t)\rangle + \langle x(t),\ \dot{y}(t)\rangle$$

   (b)

$$\langle Ax(t),\ y(t)\rangle = \langle x(t),\ A^t y(t)\rangle$$

   onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno usual do $I\!\!R^n$, e a^t denota a matriz transposta de A

7. Se A é uma matriz anti simétrica (isto é $A^t = -A$), então mostre que as soluções do sistema diferencial linear $\dot{x} = Ax$, permanece em superfícies esféricas centradas na origem.
Sugestão. Calcule a derivada de $|x(t)|^2 = \langle x(t),\ x(t)\rangle$.

Bibliografia

[1] Figueiredo, D. G.; Neves, A. F.; *Equações Diferenciais Aplicadas*, 2 ª edição, Coleção Matemática Universtária, IMPA, 2001.

[2] Halmos, P. R.; *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Van Nostrand Reinhold, 1958

[3] Hirsch, M. W.; Smale, S.; *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, Inc, 1974