Soma de Potências e Números de Bernoulli

Pedro G. Mattos

3 de abril de 2016

Resumo

Este artigo trata de fórmulas explícitas para a soma dos n primeiros naturais e de seus quadrados e, finalmente, apresenta uma fórmula explícita para a soma das m-ésimas potências dos n primeiros naturais. A fórmula final é um polinômio em n com grau $m+1$ e depende de uma família de coeficientes chamados de números de Bernoulli.

1 Introdução

A tarefa de achar uma fórmula fechada para a soma dos n primeiros naturais, $1+2+3+4+\ldots+n$, é simples — o truque consiste em notar que, se o primeiro termo, 1, é somado com o último termo, n, e o segundo, 2, é somado com o penúltimo, $n-1$, e assim por diante, todas essas somas resultam em $n+1$. Percebe-se que, se n é par, todos os termos podem ser somados dois a dois para formarem duplas, e haverá $\frac{1}{2}n$ duplas cuja somas são $n+1$. No caso em que n é ímpar, nem todos os termos podem ser somados dois a dois; o termo central, que vale $\frac{1}{2}(n+1)$, ficará sozinho, e haverá outras $\frac{1}{2}(n-1)$ duplas de termos que somam $n+1$. Em ambos os casos, no entanto, a soma total resulta em $\frac{1}{2}n(n+1)$.

A dedução do resultado acima tem uma abordagem direta e intuitiva. Não envolve grande manipulação algébrica. O método usado para generalizar a fórmula acima, no entanto, usa manipulações extensas. Por esse motivo, será proveitoso introduzir uma notação a ser usada nas próximas seções.

Definição 1. A soma das n primeiras m-ésimas potências dos naturais será denotada por

$$S_m(n) := \sum_{i=1}^{n} i^m = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \ldots + n^m.$$

A variável m pode assumir qualquer valor natural, incluindo 0. Nesse caso temos $S_0(n) = n$, pois somam-se n unidades. A variável n também pode assumir qualquer valor natural. De fato, pode até assumir o valor 0, fosse o somatório acima redefinido para começar nesse valor, mas somar 0 não alteraria o valor de $S_m(n)$ para nenhum m e, por isso, essa possibilidade foi desconsiderada na definição.

A partir dessa definição, vale que $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$. A dedução para a soma dos n primeiros quadrados dos naturais — $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$ — ilustrará o método que será usado para achar a fórmula explícita de $S_m(n)$ nas próximas seções.

2 Soma de Potências

Para calcular a soma dos n primeiros quadrados dos naturais, explicita-se a seguinte relação, que é consequência direta da fórmula da expansão de binômios e vale para qualquer x real,

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Ao substituir o valor de x por cada natural de 1 a n, obtêm-se as seguintes n equações.

$$\begin{array}{ccccccccc}
2^3 & = & 1^3 & + & 3\cdot 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1 \\
3^3 & = & 2^3 & + & 3\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2 & + & 1 \\
4^3 & = & 3^3 & + & 3\cdot 3^2 & + & 3\cdot 3 & + & 1 \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots \\
n^3 & = & (n-1)^3 & + & 3\cdot(n-1)^2 & + & 3\cdot(n-1) & + & 1 \\
(n+1)^3 & = & n^3 & + & 3\cdot n^2 & + & 3\cdot n & + & 1
\end{array}$$

Somando-se os respectivos lados de todas essas equações, as parcelas da direita e da esquerda elevadas ao cubo se cancelam, com exceção de 1^3 à direita e $(n+1)^3$ à esquerda, e se obtem

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1.$$

Claramente, os valores do segundo e terceiro somatórios são conhecidos, pois são $S_1(n)$ e $S_0(n)$. O primeiro é o resultado buscado. Isolando-o e substituindo os valores dos somatórios conhecidos, obtem-se a expressão

$$S_2(n) = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esse método pode ser facilmente generalizado ao se considerarem todos os passos tomados acima para expoentes genéricos. No entanto, a tarefa se torna muito mais fácil se for observado o seguinte teorema.

Teorema 1. *Os somatórios $S_m(n)$ são polinômios em n de grau $m+1$ e, para $m \geq 1$, vale*

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left[(n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}S_i(n)\right].$$

Demonstração. A demosntração do teorema se dará por indução em m. O primeiro passo da indução é notar que $S_0(n) = n$ é um polinômio de grau 1 em n. Em seguida, assume-se que, para todo $k \leq m$, $S_k(n)$ são polinômios em n de grau $k+1$. Isso deve implicar que $S_{m+1}(n)$ é um polinômio em n de grau $m+2$. Para provar essa implicação, o método usado para achar $S_2(n)$ será repetido.

Analogamente, considera-se a expressão a seguir, consequência direta da fórmula de expansão do binômio

$$(x+1)^{m+2} = \sum_{i=0}^{m+2}\binom{m+2}{i}x^i = x^{m+2} + \binom{m+2}{m+1}x^{m+1} + \ldots + \binom{m+2}{1}x^1 + 1.$$

Como anteriormente, substituindo em x os naturais de 1 a n, obtêm-se as seguintes n equações

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2^{m+2} & = & 1^{m+2} & + & \binom{m+2}{m+1}1^{m+1} & + & \ldots & + & \binom{m+2}{1}1 & + & 1 \\
3^{m+2} & = & 2^{m+2} & + & \binom{m+2}{m+1}2^{m+1} & + & \ldots & + & \binom{m+2}{1}2 & + & 1 \\
4^{m+2} & = & 3^{m+2} & + & \binom{m+2}{m+1}3^{m+1} & + & \ldots & + & \binom{m+2}{1}3 & + & 1 \\
\vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots \\
(n+1)^{m+2} & = & n^{m+2} & + & \binom{m+2}{m+1}n^{m+1} & + & \ldots & + & \binom{m+2}{1}n & + & 1
\end{array}$$

Somando-se os lados direitos e esquerdos das equações, a expressão resultante depende dos polinômios $S_i(n)$ para $i \in \{0, \ldots, m\}$ e do somatório $S_{m+1}(n)$.

$$\begin{aligned}
(n+1)^{m+2} &= 1 + \binom{m+2}{m+1}S_{m+1}(n) + \ldots + \binom{m+2}{1}S_1(n) + S_0(n) \\
&= 1 + (m+2)S_{m+1}(n) + \sum_{i=0}^{m}\binom{m+2}{i}S_i(n).
\end{aligned}$$

Isolando $S_{m+1}(n)$, obtem-se a expressão

$$S_{m+1}(n) = \frac{1}{m+2}\left[(n+1)^{m+2} - 1 - \sum_{i=0}^{m}\binom{m+2}{i}S_i(n)\right],$$

válida para $m \geq 0$, e é possível concluir que o somatório $S_{m+1}(n)$ é um polinômio em n, pois $(n+1)^{m+2}$ é um polinômio, todos $S_i(n)$ são polinômios pela hipótese de indução e esses polinômios estão multiplicados por números racionais. Por fim, como $(n+1)^{m+2}$ tem grau $m+2$ e todos $S_i(n)$ têm grau menor, conclui-se que o grau de $S_{m+1}(n)$ é $m+2$ e a segunda parte da indução está completa. Logo todo somatório $S_m(n)$ é um polinômios em n de grau $m+1$. Por fim, a fórmula acima resulta na fórmula do enunciado substituindo $m+1$ por m. ∎

3 Números de Bernoulli

O teorema 1 será útil para prosseguir o estudo da fórmula explícita para a soma de potências de naturais. Se o somatório $S_m(n)$ é um polinômio, ele pode ser escrito na forma padrão de polinômios com seus coeficientes explicitados, o que sugere a seguinte definição.

Definição 2. Os coeficientes do polinômio $S_m(n)$ serão denotados como $C_{m,i}$, de tal modo que

$$S_m(n) := \sum_{i=0}^{m+1} C_{m,i}n^i = C_{m,0} + C_{m,1}n + C_{m,2}n^2 + \ldots + C_{m,m+1}n^{m+1}.$$

A variável m pode assumir qualquer valor natural, incluindo 0, como ja discutido na definição 1. Por conveniência, define-se que a variável i pode assumir qualquer valor natural independentemente de m, mas que, para todo $i > m+1$, o coeficiente vale $C_{m,i} = 0$.

A partir dessa definição, o objetivo se torna determinar o valor de cada coeficiente $C_{m,i}$ e como eles se relacionam uns aos outros. De imediato, é possível notar alguns padrões claros para esses coeficientes. Os termos independentes dos polinômios S_m, por exemplo, são sempre nulos.

Teorema 2. *Para todo $m \geq 0$, vale $C_{m,0} = 0$.*

Demonstração. Verifica-se isso novamente por indução em m, notando-se primeiro que $C_{0,0} = 0$. Em seguida, assume-se que $C_{k,0} = 0$ para todo $k \leq m$. Na fórmula do teorema 1, vê-se que, pela hipótese de indução, nenhum dos polinômios $S_i(n)$ tem termo independente; ainda, vê-se que o termo independente de $(n+1)^{m+2}$, que é 1, anula-se com o termo -1 da equação. Portanto, $S_{m+1}(n)$ também não terá termo independente e a indução está concluída. ∎

Esse resultado, embora extremamente simples, é classificado como teorema por ser importante na classificação geral dos coeficientes da definição 2. Pode-se achar uma relação recursiva para esses coeficientes ao se considerar, novamente, a fórmula do teorema 1.

Lema 1. *Os coeficientes $C_{m,i}$ satisfazem, para $m \geq 1$ e $1 \leq i \leq m+1$, a relação*

$$C_{m,i} = \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{i} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,i}\right].$$

Demonstração. Substituindo, na fórmula do teorema 1, $(n+1)^{m+1}$ por sua expansão binomial e $S_i(n)$ pela expressão polinomial com os coeficientes da definição 2, e já desconsiderando os termos independentes, obtêm-se

$$S_m(n) = \frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m+1}\binom{m+1}{i}n^i - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}\sum_{i=1}^{j+1}C_{j,i}n^i\right].$$

Faz-se justificada, agora, a definição livre de i nos coeficientes $C_{m,i}$. Notando que, para todo $i > j+1$, vale $C_{j,i} = 0$, deduz-se da equação anterior que

$$S_m(n) = \sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{i} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,i}\right]n^i,$$

e essa última relação permite estabelecer a fórmula recursiva para os coeficientes de S_m do enunciado, que vale para $m \geq 1$ e $1 \leq i \leq m+1$. ∎

Um estudo avançado de como se comportam os coeficientes $C_{m,i}$ pode ser mais facilmente elaborado quando em mãos de uma fórmula recursiva que os gere. No entanto, antes de uma descrição geral de tais coeficientes, é conveniente que alguns valores para m e i pequenos sejam conhecidos. Os coeficientes da tabela abaixo foram calculados a partir dos polinômios S_m pela fórmula do teorema 1. Os cálculos não são mostrados neste artigo.

m,i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1									
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$							
3	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$						
4	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$					
5	0	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$				
6	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$			
7	0	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{1}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		
8	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	
9	0	0	$-\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Tabela. Coeficientes $C_{m,i}$ dos polinômios S_m para $m \in \{0, \ldots, 9\}$.

Observando a tabela, outros padrões ficam nítidos para os coeficientes $C_{m,i}$. Nota-se que o coeficiente líder do polinômio S_m é sempre o inverso de seu grau e o coeficiente seguinte é sempre meio. A seguir, serão provadas algumas proposições a respeito de subfamílias desses coeficientes com o intuito de esclarecer o padrão por trás desses números e estimular a intuição de uma relação geral entre as subfamílias $C_{i,1}$ e $C_{m,m+1-i}$. Na tabela, essas subfamílias representam, respectivamente, os coeficientes da primeira coluna não nula e a diagonal a partir deles. Parece existir uma relação entre elas, exemplificada no começo do parágrafo.

Lema 2. *Para todo $m \geq 0$, vale $C_{m,m+1} = \dfrac{1}{m+1}$.*

Demonstração. Para $m = 0$, $C_{0,1} = 1$. Para $m \geq 1$, pelo lema 1,

$$C_{m,m+1} = \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m+1} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,m+1}\right].$$

Notando que $C_{j,m+1} = 0$ para todo $j < m$, segue que

$$C_{m,m+1} = \frac{1}{m+1}\left[1 - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,m+1}\right] = \frac{1}{m+1}.$$

■

Lema 3. *Para todo $m \geq 1$, vale $C_{m,m} = \dfrac{1}{2}$.*

Demonstração. Pelo lema 1,

$$C_{m,m} = \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,m}\right].$$

Notando que $C_{j,m} = 0$ para todo $j < m-1$ e que, pelo lema anterior, $C_{m-1,m} = \frac{1}{m}$, pois $m - 1 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
C_{m,m} &= \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m} - \binom{m+1}{m-1}C_{m-1,m}\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[(m+1) - \frac{(m+1)m}{2}\frac{1}{m}\right] \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

■

Lema 4. *Para todo $m \geq 2$, vale $C_{m,m-1} = \dfrac{m}{12}$.*

Demonstração. Pelo lema 1,

$$C_{m,m-1} = \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m-1} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,m-1}\right].$$

Notando que $C_{j,m-1} = 0$ para todo $j < m-2$ e que, pelos lemas anteriores, $C_{m-2,m-1} = \frac{1}{m-1}$ e $C_{m-1,m-1} = \frac{1}{2}$, pois $m - 2 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
C_{m,m-1} &= \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m-1} - \binom{m+1}{m-2}C_{m-2,m-1} - \binom{m+1}{m-1}C_{m-1,m-1}\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[\frac{(m+1)m}{2!} - \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\frac{1}{m-1} - \frac{(m+1)m}{2}\frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{m}{12}.
\end{aligned}$$

■

Lema 5. *Para todo $m \geq 3$, vale $C_{m,m-2} = 0$.*

Demonstração. Pelo lema 1,

$$C_{m,m-2} = \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m-2} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,m-2}\right].$$

Notando que $C_{j,m-2} = 0$ para todo $j < m-3$ e que, pelos lemas anteriores, $C_{m-3,m-2} = \frac{1}{m-2}$, $C_{m-2,m-2} = \frac{1}{2}$ e $C_{m-1,m-2} = \frac{m-1}{12}$, pois $m - 3 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
C_{m,m-2} &= \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m-2} - \binom{m+1}{m-3}C_{m-3,m-2}\right. \\
&\qquad \left. - \binom{m+1}{m-2}C_{m-2,m-2} - \binom{m+1}{m-1}C_{m-1,m-2}\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[\frac{(m+1)m(m-1)}{3!} - \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{4!}\frac{1}{m-2}\right. \\
&\qquad \left. - \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\frac{1}{2} - \frac{(m+1)m}{2}\frac{(m-1)}{12}\right] \\
&= m(m-1)\left[\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} - \frac{1}{3!}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{12}\right] = 0.
\end{aligned}$$

■

Lema 6. *Para todo $m \geq 4$, vale $C_{m,m-3} = -\dfrac{m(m-1)(m-2)}{720}$.*

Demonstração. Pelo lema 1,

$$C_{m,m-3} = \frac{1}{m+1}\left[\binom{m+1}{m-3} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}C_{j,m-3}\right].$$

Notando que $C_{j,m-3} = 0$ para todo $j < m-4$ e que, pelos lemas anteriores, $C_{m-4,m-3} = \frac{1}{m-3}$, $C_{m-3,m-3} = \frac{1}{2}$, $C_{m-2,m-3} = \frac{m-2}{12}$ e $C_{m-1,m-3} = 0$, pois $m-4 \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned}
C_{m,m-3} &= \frac{1}{m+1}\Bigg[\binom{m+1}{m-3} - \binom{m+1}{m-4}C_{m-4,m-3} - \binom{m+1}{m-3}C_{m-3,m-3} \\
&\qquad - \binom{m+1}{m-2}C_{m-2,m-3} - \binom{m+1}{m-1}C_{m-1,m-3}\Bigg] \\
&= \frac{1}{m+1}\Bigg[\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{4!} \\
&\qquad - \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{5!}\frac{1}{m-3} \\
&\qquad - \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{4!}\frac{1}{2} \\
&\qquad - \frac{(m+1)m(m-1)}{3!}\frac{(m-2)}{12}\Bigg] \\
&= m(m-1)(m-2)\left[\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!}\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{12}\right] \\
&= -\frac{m(m-1)(m-2)}{720}.
\end{aligned}$$

■

Com esses lemas, percebe-se que o coeficiente $C_{m,m+1-i}$ é sempre um produto de uma constante e de termos do tipo m, $m-1$, $m-2$ etc., exceto no caso em que $C_{m,m+1} = \frac{1}{m+1}$. Isso sugere uma relação entre os coeficientes $C_{m,m+1-i}$ e coeficientes binomiais da forma $\binom{m+1}{i}$. Com um pouco de cuidado, vê-se que

$$\begin{aligned} C_{m,m+1} &= \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{0}(1) \\ C_{m,(m+1)-1} &= \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ C_{m,(m+1)-2} &= \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{2}\left(\frac{1}{6}\right) \\ C_{m,(m+1)-3} &= \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{3}(0) \\ C_{m,(m+1)-4} &= \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{4}\left(-\frac{1}{30}\right), \end{aligned}$$

e é natural inferir o teorema a seguir.

Teorema 3. *Para todo $m \geq 0$, vale*

$$C_{m,(m+1)-i} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{i}C_{i,1}$$

para $0 \leq i \leq m$.

Demonstração. A demonstração será feita a partir de indução em m, que se dará através do mesmo método dos cinco lemas anteriores. Nota-se que a proposição claramente vale para $m = 0$, o caso base da indução. De fato, se $m = 0$, i só pode ser 0 e, então, basta conferir que

$$C_{0,(0+1)-0} = \frac{1}{1}\binom{1}{0}C_{0,1} = C_{0,1}.$$

O segunda passo da indução consiste em provar que, se para todo natural $k \leq m$ vale

$$C_{k,(k+1)-i} = \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}C_{i,1}$$

para $0 \leq i \leq k$, então também vale

$$C_{m+1,m+2-i} = \frac{1}{m+2}\binom{m+2}{i}C_{i,1}$$

para $0 \leq i \leq m+1$.

Se $0 \leq i \leq m+1$, então $1 \leq m+2-i \leq m+2$. Isso significa que, para esses valores de i vale, pelo lema 1,

$$C_{m+1,m+2-i} = \frac{1}{m+2}\left[\binom{m+2}{m+2-i} - \sum_{j=0}^{m}\binom{m+2}{j}C_{j,m+2-i}\right]. \qquad (1)$$

Notando que $C_{j,m+2-i} = 0$ para todo $j < m+2-i-1 = m-(i+1)$ e que $\binom{m+2}{m+2-i} = \binom{m+2}{i}$, segue que

$$C_{m+1,m+2-i} = \frac{1}{m+2}\left[\binom{m+2}{i} - \sum_{j=0}^{i-1}\binom{m+2}{m-(i-1)+j}C_{m-(i-1)+j,m+2-i}\right].$$

É válido ressaltar que o parâmetro j do somatório foi deslocado $m-(i-1)$ para começar de 0.

A passagem seguinte usa a hipótese de indução e requer bastante cuidado com os índices — deve-se garantir que eles estejam dentro das hipóteses. Como $0 \leq j \leq i-1$, ao somar $m+1-i$ nas três partes da inequação, obtem-se $m+1-i \leq m-(i-1)+j \leq m$; ainda, como $0 \leq i \leq m+1$, $m+1-i \geq 0$ e conclui-se que $0 \leq m-(i-1)+j \leq m$. Sendo assim, para $k = m-(i-1)+j$, vale a hipótese de indução e

$$C_{m+1-i+j,m+2-i} = \frac{1}{m+2-i+j}\binom{m+2-i+j}{j}C_{j,1}.$$

Substituindo esse valor acima na equação (1), resulta

$$C_{m+1,m+2-i} = \frac{1}{m+2}\left[\binom{m+2}{i} - \sum_{j=0}^{i-1}\frac{\binom{m+2}{m+1-i+j}\binom{m+2-i+j}{j}}{m+2-i+j}C_{j,1}\right]. \qquad (2)$$

O termo do somatório pode ser rearrumado, de modo que o resultado procurado possa ser achado. Notando que o termo $(m+2-i+j)!$ do segundo binomial se anula com o termo $(m+1-i+j)!$ e o denominador $(m+2-i+j)$, e multiplicando tudo por $(i+1)!$ no numerador e $(i+1)i!$ no denominador, obtem-se

$$\frac{\binom{m+2}{m+1-i+j}\binom{m+2-i+j}{j}}{m+2-i+j} = \binom{m+2}{i}\binom{i+1}{j}\frac{1}{(i+1)}.$$

Assim, substituindo novamente na equação (2) e notando a equação do lema 1 para $C_{i,1}$, seque que

$$
\begin{aligned}
C_{m+1,m+2-i} &= \frac{1}{m+2}\left[\binom{m+2}{i} - \sum_{j=0}^{i-1}\binom{m+2}{i}\binom{i+1}{j}\frac{1}{(i+1)}C_{j,1}\right] \\
&= \frac{1}{m+2}\binom{m+2}{i}\frac{1}{(i+1)}\left[\binom{i+1}{1} - \sum_{j=0}^{i-1}\binom{i+1}{j}C_{j,1}\right] \\
&= \frac{1}{m+2}\binom{m+2}{i}C_{i,1}.
\end{aligned}
$$

Vale lembrar que esse resultado supunha $0 \leq i \leq m+1$. Portanto está provado o teorema. ■

A importância desse teorema está no fato de que os coeficientes $C_{m,i}$ dependem somente dos coeficientes $C_{i,1}$ e de uma constante determinada por m e i. Isso sugere que os coeficientes $C_{i,1}$ podem ser entendidos como constantes fundamentais. Como já resssaltado, eles são a coluna 1 da tabela de coeficientes. Esses coeficientes são os chamados números de Bernoulli e, como dependem somente de um índice, podem ser redefinidos como $C_m := C_{m,1}$.

A partir da fórmula do lema 1, os números de Bernoulli podem ser relacionados entre si recursivamente, para $m \geq 1$

$$
C_m = 1 - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{j}C_j.
$$

O teorema 3 permite, finalmente, reescrever a fórmula para os polinômios $S_m(n)$ como

$$
S_m(n) = \sum_{i=0}^{m+1}\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{i}C_i n^{m+1-i}.
$$