Um Problema Relacionado à Rotação do Círculo

Pedro G. Mattos

31 de agosto de 2016

Resumo

Ao rotacionarmos repetidas vezes um círculo por um ângulo fixo, observamos que um ponto específico desse círculo pode nunca voltar à sua posição inicial. Isso depende somente do ângulo escolhido para a rotação. Nesses casos, pode-se provar que a trajetória desse ponto será densa no círculo – ou seja, a trajetória do ponto eventualmente se aproximará quanto quisermos de qualquer ponto do círculo. Sendo assim, podemos nos perguntar algo além: dada uma distância ε, qual é o menor número N de rotações que devem ser realizadas para que a trajetória de um ponto volte a estar no máximo a essa dada distância de sua posição original? Para responder a essa pergunta, definiremos o conjunto círculo como o intervalo $[0, 1]$, em que 0 e 1 são identificados, e uma rotação R_α nesse conjunto como a função $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod 1$, e usaremos frações continuadas para achar o menor N tal que $|R_\alpha^N(x) - x| < \varepsilon$.

Definição 1. O conjunto *círculo* é definido como o intervalo $[0, 1]$ em que 0 e 1 são identificados. Denotaremos esse conjunto como S^1.

Definição 2. A função de *rotação por um ângulo* α no círculo é definida a partir de um número real α como

$$\begin{aligned} R_\alpha : S^1 &\to S^1 \\ x &\mapsto x + \alpha \mod 1. \end{aligned}$$

Notemos que, como definimos o círculo como o intervalo $[0, 1]$, para R_α fazer sentido, temos que usar $\mod 1$, que é o mesmo que dizer que subtraímos o maior inteiro possível de $x + \alpha$; ou seja, $R_\alpha(x) = x + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor$. Vale comentar que a rotação por um ângulo α que definimos é equivalente a nossa ideia intuitiva de uma rotação geométrica por um ângulo $2\pi\alpha$. Ainda, notemos que $R_{-\alpha} = (R_\alpha)^{-1}$. Assim, definimos R_α^N como a N-ésima composição de R_α consigo mesma se $N > 0$, a N-ésima composição de $(R_\alpha)^{-1}$ consigo mesma se $N < 0$, e a função identidade se $N = 0$. Nesse caso, podemos notar que $R_\alpha^N(x) = x + N\alpha \mod 1$.

A seguir, demonstraremos duas proposições que são essenciais para o entendimento do problema proposto. A primeira proposição trata da periodicidade das órbitas de um ponto do círculo. Para isso, consideraremos antes a seguinte definição.

Definição 3. A *órbita* de um ponto $x \in S^1$ é o conjunto

$$O(x) := \{R_\alpha^N(x) : N \in \mathbb{N}\}.$$

Dizemos que a órbita de um ponto x é *periódica* se existe um natural $N \neq 0$ tal que $R_\alpha^N(x) = x$.

Proposição 1. *A órbita de um ponto do círculo é periódica se e somente se α é racional.*

Demonstração. Seja $x \in S^1$. Primeiro, suponhamos que α é racional. Então existem naturais p e $q \neq 0$ tais que $\alpha = \frac{p}{q}$. Assim, é claro que $R_\alpha^q(x) = x + q\alpha \mod 1 = x + p \mod 1 = x$. Logo $O(x)$ é periódica. Por outro lado, suponhamos que $O(x)$ é periódica. Então existe natural $q \neq 0$ tal que $R_\alpha^q(x) = x$. Como $R_\alpha^q(x) = x + q\alpha \mod 1$, isso implica que $q\alpha$ é inteiro, digamos p. Logo $\alpha = \frac{p}{q}$ é racional. ■

A próxima proposição mostra mais uma característica importante da órbita de um ponto sob uma rotação por ângulo irracional. Além de nunca ser periódica, essa órbita é também densa em S^1. Definiremos uma distância no círculo, relembraremos o conceito de um conjunto denso e, então, enunciaremos a segunda proposição.

Definição 4. A função distância no círculo é definida por

$$\begin{aligned} d : S^1 \times S^1 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}. \end{aligned}$$

Não demonstraremos que a função d satisfaz as propriedades de uma métrica.

Definição 5. Sejam X e Y conjuntos que satisfazem $X \subseteq Y$ e munidos da métrica $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$. Dizemos que o conjunto X é denso no conjunto Y quando, para todo $\varepsilon > 0$ e $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $d(y, x) < \varepsilon$.

Proposição 2. *Seja $x \in S^1$ e α irracional. Então a órbita de x é densa no círculo.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $y \in S^1$. Quremos mostrar que existe um inteiro N tal que $d(y, R_\alpha^N(x)) < \varepsilon$. Para isso, dividimos o intervalo $[0, 1]$ em m intervalos $I_k = [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}]$, com $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, sendo m um inteiro tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Notemos que os intervalos I_k têm comprimento $\frac{1}{m}$, o que implica que dois pontos dentro do mesmo intervalo I_k distam menos que ε. Como sabemos que a órbita de x não é periódica, pelo princípio das gavetas devem existir inteiros i, j tais que $R_\alpha^i(x)$ e $R_\alpha^j(x)$ são distintos e pentencem a um mesmo intervalo I_k. Nesse caso, vale que $d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) < \varepsilon$. Mas $d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) = d(R_\alpha^{i-j}(x), x)$. Por isso, consideremos a função R_α^{i-j}. Essa função desloca x um comprimeiro menor que ε e, por isso, seja qual for o intervalo em que y estiver, deverá existir um inteiro n tal que $d(y, R_\alpha^{n(i-j)}(x)) < \varepsilon$. Sendo assim, tomamos $N = n(i-j)$ e a proposição está provada. ■

Agora que já demosntramos as duas proposições anteriores sobre as órbitas de pontos do círculo, podemos considerar o problema proposto no resumo. Consideremos uma rotação por um ângulo irracional. Como a órbita de qualquer ponto x é densa no círculo, sabemos que ela se aproxima quanto quisermos do ponto x. De fato, para qualquer ε, queremos achar o menor natural N tal que $d(R_\alpha^N(x), x) < \varepsilon$. Para facilitar a resolução do problema, consideraremos $x = 0$, já que a solução para um ponto qualquer é a mesma. No entanto, para resolvermos esse problema, precisamos de um teorema envolvendo as chamadas frações continuadas[1] Para isso, definiremos o que é tal objeto e enunciaremos algumas proposições relevantes. Alguns desses resultados não serão provados neste artigo; as demonstrações podem ser achadas em [1] e, para mais aprofundamento na teoria das frações continuadas, vale conferir [2].

Definição 6. Seja $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ uma sequência de números naturais tal que $a_i > 0$ para todo $i > 0$. Definimos uma *fração continuada finita* $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ como a expressão

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{a_n}}}}$$

e uma *fração continuada infinita* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ como o limite da sequência de frações continuadas finitas $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} := ([a_0; a_1, a_2, \ldots, a_i])_{i\in\mathbb{N}}$, se ele existir.

É possível mostrar que o limite da sequência $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ acima sempre existe e que, portanto, uma fração continuada infinita sempre está bem definida. De fato, todo número real positivo pode ser escrito como uma fração continuada — finita, no caso dos racionais, e infinita, no caso dos irracionais. Se α é um número irracional, existe uma sequência $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ como acima tal que $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Ainda, quando truncaos a fração continuada de α para as frações continuadas $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, estas definem números racionais que representaremos por

$$\frac{p_n}{q_n} := [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

[1] Em inglês são chamadas de *continued fractions*. Também são conhecidas como *frações contínuas* em português, mas adotei essa nomenclatura porque a palavra *contínua* tem outro significado mais comum na Matemática, como em função contínua.

com p_n e q_n primos entre si. Nesse caso, a sequência q_n é estritamente crescente. Todos esses resultados podem ser conferidos em [1] e [2]. Então, ressaltamos o resultado mais importante para a resolução do nosso problema, que pode ser achado em [1].

Teorema. *Para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_{n+1}$ temos*

$$|q_n x - p_n| \leq |qx - p|.$$

Além disso, se $0 < q < q_n$ a desigualdade acima é estrita, ou seja

$$|q_n x - p_n| < |qx - p|.$$

Corolário. *A partir desse teorema, podemos concluir que valem as seguintes desigualdades para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_n$ e $n \geq 1$*

$$|q_n x - p_n| < |q_{n-1} x - p_{n-1}| \leq |qx - p|.$$

Procedemos, então, para o resultado final.

Teorema 3. *Seja α um número irracional e $\varepsilon > 0$. Então o menor N tal que $d(R_\alpha^N(0), 0) < \varepsilon$ é um denominador q_n da sequência de frações continuadas de α que satisfaz*

Demonstração. Notemos que $d(R_\alpha^N(0), 0) = \min\{(R_\alpha)^N(0), 1 - (R_\alpha)^N(0)\}$ e, como $(R_\alpha)^N(0) = N\alpha \bmod 1 = N\alpha - \lfloor N\alpha \rfloor$,

$$d(R_\alpha^N(0), 0) = \begin{cases} N\alpha - \lfloor N\alpha \rfloor & \text{se } N\alpha - \lfloor N\alpha \rfloor \leq \frac{1}{2} \\ -N\alpha + (\lfloor N\alpha \rfloor + 1) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em ambos os casos, temos $d(R_\alpha^N(0), 0) = |Q\alpha - P|$, com $Q = N$, e diminuir a distância $d(R_\alpha^N(0), 0)$ é o mesmo que diminuir $|Q\alpha - P|$. Portanto a pergunta inicial se resume a determinar o menor Q tal que $|Q\alpha - P| < \varepsilon$. Mas já sabemos responder essa pergunta usando o teorema acima. Temos, para todo $Q, P \in \mathbb{Z}$, com $0 < Q < q_n$ e $n \geq 1$

$$|(R_\alpha)^{q_n}(0)| < |(R_\alpha)^{q_{n-1}}(0)| \leq |(R_\alpha)^Q(0)|.$$

Por fim, como sabemos que $q_n \to \infty$, dado ε, sempre podemos escolher n tal que $|(R_\alpha)^{q_n}(0)| < \varepsilon \leq |(R_\alpha)^{q_{n-1}}(0)|$ e assim, para esse ε, q_n é o menor natural N tal que $|(R_\alpha)^N(0)| < \varepsilon$. ■

Referências

[1] Martinez, Fabio Brochero; Moreira, Carlos Gustavo; Saldanha, Nicolau; e Tengan, Eduardo. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. IMPA, 2013.

[2] Rocket, A. M.; Szüsz, P. *Continued Fractions*. Singapore, 1992.