Capítulo 1

Princípios de Lógica

A lógica de primeira ordem tem alguns conceitos primitivos básicos. O primeiro é o de *variáveis*, que serão representadas por *letras latinas minúsculas*

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$$

e, eventualmente, letras subescritas por *índices numéricos* (como o índice i em a_i), que, por sua vez, serão representados pelos *algarismos*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

sozinhos ou agrupados em sequências finitas para formar outros índices.

O segundo conceito é o de *predicados*, que serão representados por *letras gregas minúsculas*

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$$

seguidas de parênteses com variáveis. Um predicado é uma *proposição* se não recebe nenhuma variável, e é denotado simplesmente ϕ; é um predicado *unário* se recebe uma variável, e é denotado $\phi(x)$; e é *binário* se recebe duas variáveis, e é denotado $\phi(x, y)$. Demais variáveis indicam demais ordens de predicados.

O terceiro conceito é o de *constantes lógicas.* Cosideraremos duas categorias de contantes lógicas. A primeira são os *conectivos lógicos*, que serão representados pelos símbolos

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow,$$

chamados, respectivamente, *negação*, *conjunção*, *disjunção*, *implicação* e *equivalência.* Os conectivos são usados para formar sentenças a partir de sentenças já existentes, o que será explicado a seguir, e a interpretação de cada coectivo é a seguinte. A negação tranforma uma sentença S na sentença "Não é verdade que S". A conjunção tranforma sentenças S e T na sentença "É verdade que S e T". A disjunção tranforma sentenças S e T na sentença "É verdade que S ou é verdade que T ou ambas são verdade"(nesse caso, os usos de $\vee$ e de "ou"diferem um pouco e escrevemos assim para enfatizar que as sentenças podem ser simultaneamente verdadeiras). A implicação tranforma sentenças S e T na sentença "S implica T", no sentido de que, se S é verdadeira, então T também o é. A equivalência significa que duas sentenças S e T uma implica a outra. A segunda são os *quantificadores lógicos*, que serão representados pelos símbolos

$$\forall, \exists,$$

chamados, respectivaente, de *quantificador universal* e *quantificador existencial*.

O terceiro conceito é o de *sentenças*, que são todas sequências de predicados formadas ao escrever $\neg$ na frente de um predicado ou sentença, como em $\neg\phi(x)$, ou a unir dois predicados ou sentenças com os conectivos $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, como em $\phi(x) \wedge \psi(x)$,$\phi(x) \vee \psi(x)$,$\phi(x) \rightarrow \psi(x)$,$\phi(x) \leftrightarrow \psi(x)$, ou ainda escrevendo $\forall x$ ou $\exists x$ na frente de um predicado ou sentença, como em $\forall x\ \phi(x)$ ou $\exists x\ \phi(x)$. Representaremos sentenças da mesma forma que representamos predicados, com letras gregas minúsculas e variáveis em parênteses.

Comentário breve sobre conectivos e quantificadores lógicos: em vez de considerar tantos conectivos e quatificadores, poderíamos simplesmente considerar um outro conectivo lógico $\uparrow$, chamado de *negação alternativa*, cuja interpretação é que para sentenças S e T, não é verdade que S e T são verdadeiras simultaneamente. A partir disso, para todas sentenças ϕ e ψ, poderíamos escrever (1) $\phi \uparrow \phi$ para significar $\neg\phi$, (2) $\neg(\phi \uparrow \psi)$ para significar $\phi \wedge \psi$, (3) $\neg((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$ para significar $\phi \vee \psi$, (4) $(\neg\phi) \vee \psi$ para significar $\phi \rightarrow \psi$ e (5) $(\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ para significar $\phi \leftrightarrow \psi$. No entanto, claramente é mais simples usar os conectivos lógicos originais, que são mais intuitivos e deixam as sentenças mais curtas. Ainda, poderíamos considerar somente o quantificador universal e escrever $\neg\forall x\ \neg\phi(x)$ para significar $\exists x\ \phi(x)$.

Definição 1.1 (=)**.** Para toda sentença $\phi(x)$, vale que

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y))).$$

A primeira das implicações é conhecida como Princípio da Indicernibilidade dos Idênticos e a implicação inversa como Princípio da Identidade dos Indicerníveis. Ambos formam a definição de igualdade ou identidade.

Definição 1.2 ($\neq$)**.**

$$\forall x \forall y (x \neq y \leftrightarrow \neg(x = y)).$$

Definição 1.3 ($\exists!$)**.** Para toda sentença $\phi(x)$, vale que

$$\exists! x\ \phi(x) \leftrightarrow \exists x \forall y (\phi(y) \leftrightarrow y = x).$$

Observemos que essa sentença é equivalente a

$$\exists! x\ \phi(x) \leftrightarrow \exists x (\phi(x) \wedge \forall y (\phi(y) \rightarrow y = x)).$$

1.1 Regras de Inferência e Dedução Natural

Negação:

1	$\neg\neg A$	P
2	A	E $\neg$

Conjunção:

1	$A \vee B$	P
2	A	E $\neg$

Disjunção:

Implicação:

1	A	P
2	$A \to B$	P
3	B	E $\to$

Equivalência:

Capítulo 2

Axiomas da Teoria de Conjuntos

2.1 Pertencimento, Vazio e Extensão

A relação de pertencimento ($\in$) na teoria de conjuntos é uma relação fundamental. Todas as sentenças são formadas a partir das sentenças da lógica de primeira ordem e das sentenças da forma $x \in y$. Analogamente à relação de igualdade e desigualdade ($=$ e $\neq$), definimos a partir de $\in$ a relação $\notin$ como abaixo.

Definição 2.1 ($\notin$)**.**

$$\forall x \forall y (y \notin x \leftrightarrow \neg(y \in x)).$$

Axioma 1 (Vazio)**.**

$$\exists x \forall y (y \notin x).$$

Axioma 2 (Extensão)**.**

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)).$$

Teorema 2.1. *O conjunto vazio é único.*

$$\exists ! x \forall y (y \notin x).$$

Nesse caso, denotamos $\emptyset \coloneqq x$.

Demonstração. Queremos mostrar que $\exists x \forall v (\forall y (y \notin v) \leftrightarrow v = x)$. Primeiro, notamos que, pelo *axioma do vazio*, $\exists x \forall y (y \notin x)$. Então, para todo conjunto v, se $v = x$ segue que $\forall y (y \notin v)$. Reciprocamente, se $v \neq x$, pelo *axioma da extensão* segue que $\neg \forall y (y \in v \leftrightarrow y \in x)$; ou seja, $\exists y ((y \in v \wedge y \notin x) \vee (y \notin v \wedge y \in x))$. Como $\forall y (y \notin x)$, segue que $\exists y (y \in v \wedge y \notin x)$ e, em particular, $\exists y (y \notin v)$, o que é equivalente a $\neg \forall y (y \notin v)$. ■

Demonstração. :

1	$\exists x \forall y (y \notin x)$	A_1
2	$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$	A_2
3	$\forall y (y \notin x)$	1
4	$x = v \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in v)$	2
5	$\forall y (y \notin v)$	H
6	$\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in v)$	3,5
7	$x = v$	4,6
8	$\forall y (y \notin x) \to x = v$	5-7
9	$\forall v (\forall y (y \notin x) \to x = v)$	8
10	$\forall y (y \notin x) \land \forall v (\forall y (y \notin x) \to x = v)$	3,9
11	$\exists! x (\forall y (y \notin x))$	10

■

2.2 Substituição e Especificação

Axioma 3 (Substituição)**.** Para toda fórmula $\phi(x, z, w)$ em que y não é mencionado,

$$\forall x (\forall z \exists! w \ \phi(x, z, w) \to \exists! y \forall w (w \in y \leftrightarrow \exists z (z \in x \land \phi(x, z, w)))).$$

Nesse caso, denotamos $y \coloneqq \phi[x]$.

É possível mostrar que o $\exists! y$ pode ser trocado por $\exists y$ e o axioma acima pode ser demonstrado a partir do *axioma da extensão.* Seja y o conjunto do teorema. Seja v um conjunto e suponhamos $\exists v \forall w (w \in v \leftrightarrow \exists z (z \in x \land \phi(x, z, w)))$. Queremos mostrar que $v = y$. Para isso, seja w um conjunto. Se $w \in v$, segue que $\exists z (z \in x \land \phi(x, z, w))$, logo $w \in y$. Reciprocamente, se $w \in y$, segue que $\exists z (z \in x \land \phi(x, z, w))$, logo $w \in v$. Assim, mostramos que $\forall w (w \in y \leftrightarrow w \in v)$, logo $v = y$ pelo *axioma da extensão.*

Teorema 2.2 (Especificação)**.** *Para toda fórmula $\phi(z)$ em que y não é mencionado,*

$$\forall x \exists! y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \land \phi(z)).$$

Nesse caso, denotamos $y \coloneqq \{z \in x : \phi(z)\}$.

Demonstração. Seja x um conjunto e $\phi(z)$ uma fórmula em que y é mencionado. Assumamos que $\forall z (z \in x \to \neg \phi(z))$; ou seja, para todo $z \in x$, $\neg \phi(z)$. Vamos mostrar que $y = \emptyset$ satisfaz o teorema da especificação, ou seja, que satisfaz $\forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \land \phi(z))$. Notemos que a negação de $z \in x \land \phi(z))$ é $z \in x \to \neg \phi(z)$ e a negação de $z \in y$ é $z \notin y$. Assim, a sentença $\forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \land \phi(z))$ é equivalente à sentença $\forall z (z \notin y \leftrightarrow z \in x \to \neg \phi(z))$. Como $\forall z (z \notin \emptyset)$ e, por hipótese, $\forall z (z \in x \to \neg \phi(z))$, segue que $\forall z (z \in \emptyset \leftrightarrow z \in x \land \phi(z))$.

Caso contrário, assumamos $\exists z (z \in x \land \phi(z))$. Seja $a \in x$ tal que $\phi(a)$. Consideremos a sentença $\psi(z, w)$ definida por

$$\forall z \forall w \big(\psi(z, w) \leftrightarrow (\phi(z) \land w = z) \lor (\neg \phi(z) \land w = a)\big).$$

Note que y não é mencionado na sentença $\psi(z, w)$, pois não é mencionado em $\phi(z)$. Então temos a hipótese do *axioma da substituição.* Vamos primeiro mostrar que $\forall z \exists! w \ \psi(z, w)$, o que é equivalente a $\forall z\exists w\forall v(\psi(z,v) \leftrightarrow v = w)$. Para isso, seja z um conjunto. Se $\phi(z)$, então escolhemos $w = z$, e segue que $\psi(z,w)$. Agora, seja v um conjunto. Se $v = w$, então $\psi(z,v)$, pois $\psi(z,w)$; se $\psi(z,v)$, então, como $\phi(z)$, segue que não vale $\neg\phi(z) \wedge v = a$, logo vale $\phi(z) \wedge v = z$, portanto $v = z = w$. Agora, se $\neg\phi(z)$, então escolhemos $w = a$, e segue que $\psi(z,w)$. Agora, seja v um conjunto. Se $v = w$, então vale $\psi(z,v)$; se $\psi(z,v)$, então, como $\neg\phi(z)$, segue que não vale $\phi(z) \wedge v = w$, logo vale $\neg\phi(z) \wedge v = a$, portanto $v = a = w$. Fica, portanto, provado que $\forall z\exists! w\ \psi(z,w)$.

Pelo *axioma da substituição*, temos então que

$$\forall x\exists! y\forall w(w \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \wedge \psi(z,w))).$$

Queremos mostrar que $\forall x\exists! y\forall w(w \in y \leftrightarrow w \in x \wedge \phi(w))$. Assumamos, primeiro, que $\forall w(w \in x \wedge \phi(w))$. Então segue que $\psi(w,w)$, pois $\phi(w)$. Tomando $z = w$, temos que $z \in x$ e $\psi(z,w)$, pois $\psi(w,w)$. assim, segue pela fórmula acima que $w \in y$. Reciprocamente, assumamos que $w \in y$. Então, pela fórmula acima, segue que $\exists z(z \in x \wedge \psi(z,w)$. Se $\phi(z)$, de $\psi(z,w)$ segue que $w = z$, e então que $w \in x \wedge \phi(w)$. Se $\neg\phi(z)$, de $\psi(z,w)$ segue que $w = a$. Como $a \in x \wedge \phi(a)$, concluímos $w \in x \wedge \phi(w)$. Assim, concluímos que $\forall x\exists! y\forall w(w \in y \leftrightarrow w \in x \wedge \phi(w))$. ■

2.3 Contenção e Partes

Definição 2.2 (Contenção de conjuntos ($\subseteq$))**.**

$$\forall x\forall y(y \subseteq x \leftrightarrow \forall z(z \in y \to z \in x)).$$

Teorema 2.3.

$$\forall x\forall y(y \subseteq x \wedge x \subseteq y \leftrightarrow x = y).$$

Proposição 2.4. *1.* $\forall x(x \in \mathcal{P}x)$.

2. $\forall x(x \subseteq \emptyset \to x = \emptyset)$.

Axioma 4 (Partes)**.**

$$\forall x\exists p\forall y(y \subseteq x \to y \in p).$$

Teorema 2.5.

$$\forall x\exists! p\forall y(y \in p \leftrightarrow y \subseteq x).$$

Nesse caso, denotamos $p \coloneqq \mathcal{P}x$.

Demonstração. Pelo *axioma das partes*, $\forall x\exists q\forall y(y \subseteq x \to y \in q)$ e, pelo *teorema da especificação*, consideremos o conjunto $p \coloneqq \{y \in q : y \subseteq x\}$. ■

Teorema 2.6 (Conjunto unitário)**.**

$$\forall x\exists! y\forall w(w \in y \leftrightarrow w = x).$$

Nesse caso, denotamos $y \coloneqq \{x\}$.

Demonstração. Seja x um conjunto. Se $x = \emptyset$, tomamos $y = \mathcal{P}\emptyset$. Seja w um conjunto. Então $w = \emptyset$ implica que $w \in y$, pois $\emptyset \in \mathcal{P}\emptyset$. Por outro lado, se $w \in \mathcal{P}\emptyset$, então $w \subseteq \emptyset$, logo $w = \emptyset$. Assim, vale que $\forall w(w \in y \leftrightarrow w = x)$. Caso contrário, suponhamos que $x \neq \emptyset$ e consideremos a sentença $\phi(z,w)$ definida por

$$\forall z\forall w(\phi(z,w) \leftrightarrow (z \in x \wedge w = x) \vee (z \notin x \wedge w = z)).$$

Mostremos que $\forall z \exists! w\ \phi(z,w)$. Seja z um conjunto. Se $z \in x$, então tomando $w = x$ temos $\phi(z,w)$ e, se $z \notin x$, tomando $w = z$ temos $\phi(z,w)$. Agora, suponhamos que exista v tal que $\phi(z,v)$. Então, se $z \in x$, segue que $(z \in x \wedge v = x)$, logo $v = x = w$ e, se $z \notin x$, segue que $(z \notin x \wedge v = z)$, logo $v = z = w$.

Como $\phi(z,w)$ não menciona y, pelo *axioma da substituição* segue que

$$\forall x \exists! y \forall w (w \in y \leftrightarrow \exists z (z \in x \wedge \phi(z,w))).$$

Como $x \neq \emptyset$, então $\exists z(z \in x)$. Mostraremos que $\exists z(z \in x \wedge \phi(z,w))$ é equivalente a $w = x$. Suponhamos que $\exists z(z \in x \wedge \phi(z,w))$. Mas $z \in x \wedge \phi(z,w)$ implica que $z \in x \wedge w = x$, logo $w = x$. Suponhamos que $w = x$. Como $\exists z(z \in x)$, então $\exists z(z \in x \wedge w = x)$, o que implica que $\exists z(z \in x \wedge \phi(z,w))$. Portanto concluímos que

$$\forall x \exists! y \forall w (w \in y \leftrightarrow w = x).$$

■

Também podemos construir o conjunto unitário usando $\{x\} \coloneqq \{x \in \mathcal{P}x : x = x\}$.

Teorema 2.7 (Par)**.**

$$\forall x \forall y \exists! p \forall w (w \in p \leftrightarrow (w = x \vee w = y)).$$

Nesse caso, denotamos $p \coloneqq \{x,y\}$. *Caso* $x = y$, *denotamos* $\{x\}$.

Demonstração. Primerio, devemos notar que existe um conjunto com dois elementos, o conjunto $a \coloneqq \mathcal{P}(\mathcal{P}x)$. Sabemos da existência do conjunto $\emptyset$ e do conjunto $\mathcal{P}\emptyset$, que denotaremos por 0 e 1 por simplicidade. Para isso, notemos que 0 é o único elemento de $\mathcal{P}\emptyset$, o que implica que 0 e 1 são os únicos elementos de a. Agora, sejam x e y conjuntos e consideremos a sentença $\phi(z,w)$ definida por

$$\forall z \forall w (\phi(z,w) \leftrightarrow (z = 0 \wedge w = x) \vee (z = 1 \wedge w = y) \vee (z \notin a \wedge w = z)).$$

Vamos mostrar que $\forall z \exists! w(\phi(z,w))$. Para isso, seja z um conjunto. Sabemos que $z \in a \leftrightarrow (z = 0 \vee z = 1)$. Consideremos, então, três casos. Se $z = 0$, então tomando $w = x$, temos que $\phi(z,w)$. Ainda, para todo conjunto v, $\phi(z,v)$ implica que $v = x$, pois $z = 0 \in a$. Logo $v = w$. Se $z = 1$, então tomando $w = y$, temos que $\phi(z,w)$. Ainda, para todo conjunto v, $\phi(z,v)$ implica que $v = y$, pois $z = 1 \in a$. Logo $v = w$. Por fim, se $z \neq 0 \wedge z \neq 1$, então $z \notin a$. Tomando $w = z$, temos que $\phi(z,w)$. Ainda, para todo conjunto v, $\phi(z,v)$ implica que $v = z$, pois $z \notin a$. Logo $v = w$. Como p não é mencionado em $\phi(z,x)$, pelo *axioma da substituição*, segue que

$$\exists! p \forall w (w \in p \leftrightarrow \exists z (z \in a \wedge \phi(z,w)))$$

Basta mostrar que $\exists z(z \in a \wedge \phi(z,w))$ é equivalente a $(w = x \vee w = y)$. Note que $z \in a \wedge \phi(z,w)$ é equivalente a $(z = 0 \wedge w = x) \vee (z = 1 \wedge w = y)$. Ainda, como $0 \neq 1$, essa sentença é equivalente a ()

Assim, como $z \in a \leftrightarrow (z = 0 \vee z = 1)$, segue que ■

2.4 União e Interseção

Axioma 5 (União $\bigcup$)**.**

$$\forall x \exists u \forall y \forall z ((z \in y \wedge y \in x) \rightarrow z \in u).$$

Teorema 2.8.
$$\forall x \exists! u \forall y \forall z((z \in y \wedge y \in x) \leftrightarrow z \in u).$$
Nesse caso, denotamos $u \coloneqq \bigcup x$.

Denotamos $x \cup y \coloneqq \bigcup \{x, y\}$.

Teorema 2.9 (Interseção $\bigcap$)**.**

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists! i \forall y(y \in i \leftrightarrow \forall z(z \in x \to y \in z))).$$

Nesse caso, denotamos $i \coloneqq \bigcap x$.

Demonstração. Seja x um conjunto não vazio. Então existe $a \in x$. Nesse caso, consideremos a sentença $\phi(y)$ definida por
$$\forall y(\phi(y) \leftrightarrow \forall z(z \in x \to y \in z).)$$
Notemos que ϕ não menciona i, logo podemos usar o *teorema da especificação* para o conjunto a. Assim, segue que
$$\exists! i \forall y(y \in i \leftrightarrow y \in a \wedge \phi(y)).$$
Como $a \in x$, de $\phi(y)$ concluímos que $y \in a$. Como de $y \in a \wedge \phi(y)$ segue $\phi(y)$, concluímos que a sentença acima é equivalente a
$$\exists! i \forall y(y \in i \leftrightarrow \phi(y)).$$
■

Denotamos $x \cap y \coloneqq \bigcap \{x, y\}$.

2.5 Fundação, Infinito e Ordinais

Axioma 6 (Fundação)**.**

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in y \wedge z \in x))).$$

Axioma 7 (Infinito)**.**
$$\exists i(\emptyset \in i \wedge \forall x(x \in i \to x \cup \{x\} \in i)).$$

2.6 Escolha

Axioma 8 (Escolha)**.** Sejam definidas as propriedades $\phi(x)$ e $\psi(x)$ por

$$\forall x(\phi(x) \leftrightarrow \forall y(y \in x \to y \neq \emptyset))$$

$$\forall x(\psi(x) \leftrightarrow \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \to y \cap z = \emptyset)).$$

Vale o axioma
$$\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x) \to \exists z \forall y(y \in x \to \exists u(z \cap y = \{u\}))).$$

(Acho que tem que pedir que x é não vazio.)

2.7 Produto de Conjuntos

Teorema 2.10 (Partição e relação de equivalência)**.**

$$
\begin{aligned}
&\forall x(\exists p(\forall y(y \in p \to y \neq \emptyset)) \leftrightarrow \\
&\quad \exists r(r \subseteq p \times p \land \forall a \forall b \forall c \\
&\qquad ((a, a) \in r \land \\
&\qquad ((a, b) \in r \to (b, a) \in r) \land \\
&\qquad ((a, b) \in r \land (b, c) \in r \to (a, c) \in r))
\end{aligned}
$$

Vazio	$\exists x \forall y(y \notin x)$
Extensão	$\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y))$
Substituição	$\forall x(\forall z \exists! w\ \phi(x, z, w) \to \exists! y \forall w(w \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \land \phi(x, z, w))))$
Partes	$\forall x \exists p \forall y(y \subseteq x \to y \in p)$
União	$\forall x \exists u \forall y \forall z((z \in y \land y \in x) \to z \in u)$
Fundação	$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \land \neg \exists z(z \in y \land z \in x)))$
Infinito	$\exists i(\emptyset \in i \land \forall x(x \in i \to x \cup \{x\} \in i))$

Tabela 2.1: Os Axiomas da Teoria de Conjuntos

Capítulo 3

Investigação de quantificadores

3.1 Quantificadores específicos

A partir da noção de $\exists$ e $\forall$, quantificadores universais, pretendo definir a noção de quantificadores específicos. Primeiro abordarei os quantificadores específicos existenciais. Para definir a ideia de existir somente um objeto com alguma propriedade, usamos costumeiramente

$$\exists^1 xPx \equiv \exists x(Px \land \forall y(Py \to y = x)).$$

Para definir que existem no máximo n objetos que satisfazem a mesma propriedade, pode-se usar

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n(Px_1 \land \cdots \land Px_n \land \forall y(Py \to y = x_1 \lor \cdots \lor y = x_n)).$$

No entanto, para definir que existem exatamente n objetos que satisfazem a mesma propriedade, a notação fica um pouco mais complicada, pois deve adicionar à definição acima a desigualdade de cada um dos objetos. Poderia ser usado

$$\begin{aligned}\exists x_1 \cdots \exists x_n(&Px_1 \land \cdots \land Px_n \\ &\land x_2 \neq x_1 \land \cdots \land x_n \neq x_{n-1} \land \cdots \land x_n \neq x_1 \\ &\land \forall y(Py \to y = x_1 \lor \cdots \lor y = x_n)).\end{aligned}$$

Essa sentença, no entanto, é muito comprida, o que faz com que talvez não seja tão clara. Uma tentativa de definir essa ideia resursivamente é a seguinte

$$\exists^{n+1} xPx \equiv \exists x(Px \land \exists^n y(Py \land y \neq x)).$$

De fato, para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned}\exists^2 xPx &\equiv \exists x(Px \land \exists^1 y(Py \land y \neq x)) \\ &\equiv \exists x(Px \land \exists y(Py \land y \neq x \land \forall z((Pz \land z \neq x) \to z = y))) \\ &\equiv \exists x \exists y(Px \land Py \land y \neq x \land \forall z(Pz \to (z \neq x \to z = y)) \\ &\equiv \exists x \exists y(Px \land Py \land y \neq x \land \forall z(Pz \to (z = x \lor z = y)).\end{aligned}$$

Indutivamente, assumimos que
$\bigwedge xPx \land Q$

$$\bigwedge_x \bigwedge\nolimits_x Px \land Q$$

3.1.1 Resto em trabalho

Definições

$\forall x Px \equiv \neg\exists x \neg Px$

$\exists_1 \equiv \exists!$

$\exists_2 x P(x) \equiv \exists x \exists y (x \neq y \wedge P(x) \wedge P(x))$

$\forall_{-1} x Px \equiv \exists x \forall y (x \neq y \to Py)$

Algens resultados

$\neg\forall_{-1} x Px \equiv \forall x Px \vee \exists_2 x \neg Px$

$$\begin{aligned}\forall_{-1} x Px &\equiv \neg(\forall x Px \vee \exists_2 x \neg Px)\\ &\equiv \neg\forall x Px \wedge \neg\exists_2 x \neg Px\\ &\equiv \exists x \neg Px \wedge \neg\exists_2 x \neg Px\\ &\equiv \exists_1 x \neg Px\end{aligned}$$

Def geral

definir $\exists_n$

para $n \geq 1$

$\forall_{-n} x Px \equiv \exists_n x \neg Px$

Poderíamos também denotar $\exists^n$

3.2 Comentários sobre a dualidade dos quantificadores

3.2.1 Do formato e de subíndices

De certa forma, os símbolos $\forall$ e $\exists$ generalizam os símbolos $\wedge$ e $\vee$, da seguinte maneira: $\forall x Px$ pode ser entendido como querendo dizer que $Px_1 \wedge Px_2 \wedge Px_3 \wedge ...$, considerando todos os x_n possíveis, e $\exists x Px$, analogamente, $Px_1 \vee Px_2 \vee Px_3 \vee ....$ Por esse motivo, os símbolos $\forall$ e $\exists$ deveriam se relacionar esteticamente sos símbolos $\wedge$ e $\vee$, respectivamente. Além disso, por várias propriedades duais entre esses símbolos, uma boa notação deveriar relacionar $\forall$ e $\exists$ um com o outro de maneira estéticamente dual, assim como se relacionam $\wedge$ e $\vee$, $\cup$ e $\cap$ etc. Sugiro usarmos os símbolos $\bigvee$ e $\bigwedge$, de forma que teríamos

$$\bigwedge x Px \equiv \forall x Px \quad \text{e} \quad \bigvee x Px \equiv \exists x Px$$

Ainda, a analogia com operadores $\bigcup$ e $\bigcap$ nos sugere usar subíndices, como a seguir

$$\bigwedge_x Px \quad \text{e} \quad \bigvee_x Px$$

No modo linha teríamos $\bigwedge x Px$, $\bigvee x Px$ e $\bigwedge_x Px$, $\bigvee_x Px$. O uso de subíndices é adotado por Tarski no livro *Introduction to Logic*.

3.2.2 Subíndices com propriedades

Ainda podem ser feitas algumas definições que facilitam muito a notação. Em geral, na matemática, quantifica-se sobre elementos de um conjunto específico. Usa-se a seguinte sintaxe

$$\forall x \in X (Px) \quad \text{e} \quad \exists x \in X (Px)$$

para significar $\forall x(x \in X \to Px)$ e $\exists x(x \in X \land Px)$. Desse modo, sugiro a seguinte notação

$$\underset{x\in X}{\forall} Px \equiv \forall x(x \in X \to Px)$$

$$\underset{x\in X}{\exists} Px \equiv \exists x(x \in X \land Px)$$

Com os novos símbolos, teríamos

$$\bigwedge_{x\in X} Px \equiv \forall x(x \in X \to Px)$$

$$\bigvee_{x\in X} Px \equiv \exists x(x \in X \land Px)$$

Uma propriedade óbvia que segue é $\bigwedge_{x\in X} Px \to \bigvee_{x\in X} Px$. De modo mais geral, podemos definir

$$\bigwedge_{x|Px} Qx \equiv \bigwedge_{x}(Px \to Qx)$$

$$\bigvee_{x|Px} Qx \equiv \bigvee_{x}(Px \land Qx).$$

(NOTA: Entender as negações dessas sentenças acima.) Essa nova notação permite que escrevamos algumas definições bem simples de conjuntos como

$$\bigcap_{i\in I} A_i \coloneqq \left\{ a \;\middle|\; \bigwedge_{i\in I} a \in A_i \right\}$$

e

$$\bigcup_{i\in I} A_i \coloneqq \left\{ a \;\middle|\; \bigvee_{i\in I} a \in A_i \right\}.$$

3.2.3 Quantificadores específicos na nova notação

$$\bigvee^{n+1} xPx \equiv \bigvee x(Px \land \bigvee^{n} y(y \neq x \land Py))$$

3.3 Comentários sobre símbolos lógicos e conjuntistas

As relações estéticas entre os símbolos lógicos e os símbolos conjuntistas $\bigwedge$, $\bigcap$, $\bigvee$, $\bigcup$, $\wedge$, $\cap$, $\vee$, $\cup$, $\equiv$, $=$ sugerem que se crie uma relação estética entre $\to$ e $\subseteq$. De fato, seguindo a analogia poderíamos adotar $\leq$ para $\to$, embora esse símbolo tenha uma forte conotação de desigualdade. Russell (seguindo Peano e Frege, se não estou enganado) usava $\supset$ para $\to$, o que é curioso pois é um símbolo no sentido contrário ao seu análogo $\subseteq$ na teoria de conjuntos hoje em dia. Os símbolos $\to$, $\leftarrow$ e $\leftrightarrow$, apresentam também bela simplicidade estética, o que sugere seu uso, muito embora não sejam análogos aos $\subseteq$, $\supseteq$ e $=$ da teoria de conjuntos. Algumas possibilidades ainda para $\to$ são os vários símbolos usados para ordem: $\leq$, $\lll$, $\sqsubseteq$, $\leqslant$, $\leqq$, ou o símbolo mais comum na matemática, $\Rightarrow$, embora não tenha relação estética tão clara com $\subseteq$. Um infortúnio estético é que em $\to$ há uma seta que aponta como $>$, sentido oposto de $\leq$, mas esse infortúnio pode ser facilmente ignorado. Outro infortúnio de trocar $\to$ é que, de fato, esse símbolo já se tornou bastante intuitivo e prático de ser usado. Talvez a melhor analogia estética à tripla $\subseteq$, $\supseteq$ e $=$ seja a tripla $\lll$, $\ggg$ e $\equiv$.

Lógica	Conjuntos
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
$\leq$ $(\to)$	$\subseteq$
$\geq$ $(\leftarrow)$	$\supseteq$
$\equiv$ $(\leftrightarrow)$	$=$
$\neg$	$\complement$
$\bigwedge$	$\bigcap$
$\bigvee$	$\bigcup$