Estruturas Semelhantes a Espaços Topológicos/Mensuráveis

Pedro G. Mattos

9 de setembro de 2017

Sumário

Introdução

O objetivo deste artigo é estudar algumas propriedades comuns a objetos como espaços topológicos e espaços mensuráveis. Ambos compartilham a seguinte característica: são pares $(X, \mathcal{E})$ em que X é um conjunto e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um conjunto de subconjuntos de X que satisfaz alguns axiomas. Esses axiomas dizem respeito a operações entre conjuntos, como $\bigcup, \bigcap, \complement$, e são axiomas sobre o fechamento dessas operações sob alguma forma. No caso da topologia, os fechamentos são sob união qualquer e interseção finita, bem como ter os elementos mínimo e máximo de $\mathcal{P}(X)$, $\emptyset$ e X; no caso da sigma-álgebra, são fechamento sob complemento e união enumerável, bem como ter o elemento mínimo de $\emptyset$. Essas propriedades em comum não são simplesmente uma semelhança escolhida ao acaso, elas que permitem, por exemplo, que os morfismos f das respectivas categorias sejam funções que preservam conjuntos sob f^{-1}. Além disso, elas também permitem a definição de topologias/sigma-álgebras *puxadas* $f^\star(\mathcal{E})$ por uma função f e de topologias/sigma-álgebras $\langle \mathcal{G} \rangle$ *geradas* por um conjunto $\mathcal{G}$, as duas noções que permitem a definição do produto categórico nessas categorias.

Tendo como foco definir os morfismos como acima, pode-se esperar que qualquer propriedade de fechamento sob as operações $\bigcup, \bigcap, \complement$ serão preservadas sob f^{-1}, pois isso é um resultado básico da teoria de funções. Portanto, o que resta a ser estudado parece ser quais axiomas podem ser definidos para as estruturas $\mathcal{E}$ e como eles se relacionam. Esses axiomas têm um impacto, por exemplo, na construção de $\langle \mathcal{G} \rangle$. Os conjuntos geradores de topologias são sub-bases e são descritas de maneira notavelmente simples: os elementos de $\langle \mathcal{G} \rangle$ são uniões de interseções finitas de elementos de $\mathcal{G}$, refletindo os axiomas da topologia $\mathcal{E}$. A descrição da sigma-álgebra $\langle \mathcal{G} \rangle$, no entanto, não é tão simples, graças ao axioma de fechamento sob complementação: é necessário usar a teoria de ordinais para descrever $\langle \mathcal{G} \rangle$ a partir de $\mathcal{G}$. Ainda, uma propriedade simples de ser provada é que uma estrutura é fechada sob união de dois conjuntos se, e somente se, é fechada sob união finita qualquer. Isso sugere, junto ao comentário anterior, que a cardinalidade das uniões definidas nos axiomas estão relacionadas de certa forma pela teoria dos ordinais.

Um comentário interessante a ser feito, ainda, é que ao entendermos melhor como esses axiomas se comportam, podemos saber se eles devem ser aplicados a conjuntos de conjuntos em X ou famílias de conjuntos em X. A princípio, o uso de famílias é somente tradicional e tem notação mais usual, pois uniões e interseções são cegas para ordem e repetição. Dessa maneira, essas operações podem ser vistas como operações infinitárias em famílias de elementos de $\mathcal{P}(X)$ para X, e alguma analogia estrutural pode ser feita com os estudos da álgebra universal de operações finitárias, embora qualitativamente aparentem ser teorias diferenteso. Por fim, este é um estudo de estruturas que têm potencial de serem relacionadas com reticulados, no sentido da teoria de ordem, e álgebras lógicas em geral.

1 Os Objetos

1.1 Estruturas fechadas por união e interseção

Os objetos estudados serão pares $(X, \mathcal{E})$ em que X é um conjunto qualquer e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um conjunto de subconjuntos de X que satisfaz axiomas de fechamento sob $\bigcup, \bigcap$ e $\complement$. Consideraremos primeiro objetos que não são fechados sob complementação, mas somente fechados sob tipos diferentes de união e interseção. Sobre a interseção, deve-se fazer a seguinte ressalva: quando consideramos interseções, devemos entendê-las sempre com respeito ao universo X, de modo que a interseção vazia exista e seja igual a X. O que entendo como interseção vazia aqui pode ser descrito de duas formas, resumidamente: a interseção de uma família indexada pelo conjunto vazio (é possível definir uma função vazia), como seria mais comum na notação da matemática tradicional, ou a interseção do conjunto vazio em si, quando interseções são operações unárias sob conjuntos, como popularizado pela teoria de conjuntos. Denotamos a cardinalidade do conjunto C por $|C|$. Os axiomas a que $\mathcal{E}$ estará submetida são uma generalização dos axiomas a que topologias e sigma-álgebras estão. Dados cardinais κ, λ,

1. Para toda família $(E_i)_{i\in\kappa}$ de subconjuntos de X,
$$\bigcup_{i\in\kappa} E_i \in \mathcal{E}.$$

2. Para toda família $(E_i)_{i\in\lambda}$ de subconjuntos de X,
$$\bigcap_{i\in\lambda} E_i \in \mathcal{E}.$$

Esses axiomas podem ser vistos sob uma ótica diferente: eles afirmam que os operadores $\bigcup$ e $\bigcap$ estão bem definidos como funções de $\mathcal{E}^\kappa$ para $\mathcal{E}$. Aqui, X^I é notação para o conjunto das funções de I para X, o que é equivalente ao conjunto das famílias de elementos de X indexados por I. Em geral, a união de conjuntos de $\mathcal{E}$ está em $\mathcal{P}(X)$, mas não necessariamente em $\mathcal{E}$. Segue a definição.

Definição 1. Sejam X um conjunto e κ, λ números cardinais. Uma *estrutura de tipo* (κ, λ) sobre X é um conjunto $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X tal que

$$\begin{aligned} \bigcup : \mathcal{E}^\kappa &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (E_i)_{i\in\kappa} &\longmapsto \bigcup_{i\in\kappa} E_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigcap : \mathcal{E}^\lambda &\longrightarrow \mathcal{E} \\ (E_i)_{i\in\lambda} &\longmapsto \bigcap_{i\in\lambda} E_i \end{aligned}$$

são funções. O *tipo de união* de $\mathcal{E}$ é κ e o *tipo de interseção* de $\mathcal{E}$ é λ. Os pares $(X, \mathcal{E})$ são chamados *espaços estruturados de tipo* (κ, λ).

Um comentário sobre união de conjuntos e união de famílias Note que, em vez de definirmos uniões de famílias indexadas pelo cardinal κ poderíamos ter definido que as uniões são de conjuntos com cardinalidade κ. Como a união ignora elementos repetidos e a ordem, essa definição poderia ser equivalente à definição acima. No entanto não é. Isso é principalmente uma consequência da formalização, mas vale a pena comentar. Se fossem permitidas uniões de conjuntos de cardinalidade κ, $\mathcal{E}$ não necessariamente seria fechada por uniões de conjuntos de cardinalidade menor que κ. Para uniões de famílias, porém, se quisermos unir um conjunto C de cardinalidade menor que κ, com tanto que a cardinalidade $|C|$ seja maior que 0 podemos construir uma família indexada por κ cuja união é igual à de C da seguinte forma: indexar esse conjunto pelo cardinal $|C|$ e depois repetir um dos elementos de C até chegar a κ. A união dessa família será igual à de C e estará em $\mathcal{E}$ pois é uma união de família indexada por κ. A exceção é quando queremos fazer a união do conjunto vazio $\emptyset$. Nesse caso, não é possível criar uma família de elementos de $\mathcal{E}$ indexada por κ cuja união é $\emptyset$ a menos que $\emptyset \in \mathcal{E}$. Nesse caso, concluímos que enunciar que um conjunto é fechado por união de qualquer conjunto de cardinalidade diferente de zero e menor que κ é equivalente a enunciar que ele é fechado por união de qualquer família indexada por κ, e tirar a hipótese “diferente de zero” é equivalente a dizer que $\emptyset$ é seu elemento. Isso justifica as definições de topologia e sigma-álgebra, por exemplo, que eunciam que, além de serem fechadas por uniões de famílias com alguma cardinalidade específica, têm $\emptyset$ como elemento. Esse resultado é ressaltado na proposição a seguir e vale analogamente para interseções e o conjunto universo X.

Proposição 1. *Todo espaço estruturado $(X, \mathcal{E})$ de tipo (κ, λ) é um espaço estruturado de tipo (α, β) para todos cardinais α, β tais que $0 < \alpha < \kappa$ e $0 < \beta < \lambda$. Ainda, $\mathcal{E}$ tem tipo de união 0 se, e somente se, $\emptyset \in \mathcal{E}$ e tem tipo de interseção 0 se, e somente se, $X \in \mathcal{E}$.*

Após esse comentário, a primeira coisa a ser observada é que as estruturas de tipo 0 e 1 são desinteressantes. Como já foi comentado acima, a união vazia é igual a $\emptyset$ e a interseção vazia é igual a X, o que significa que estruturas do tipo de união 0 são estruturas em que $\emptyset \in \mathcal{E}$, e dde interseção 0 são aem que $X \in \mathcal{E}$. As estruturas de tipo 1 são desinteressantes porque uniões/interseções de um único elemento resultam nele mesmo, então estruturas do tipo 1 são qualquer conjunto de sunconjuntos de X. Estruturas do tipo 2, no entanto, são mais interessantes, pois, por indução, pode-se provar que estruturas que preservam a união de dois conjuntos preservam união finita qualquer.

Proposição 2. *Uma estrutura* $\mathcal{E}$ *sobre um conjunto* X *tem tipo de união (interseção)* 2 *se, e somente se, tem tipo de união (interseção)* n *para todo natural* $n \geq 2$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Usaremos indução. Suponhamos que a estrutura é de tipo 2. Por definição, para todos $E_0, E_1 \in \mathcal{E}$, $E_0 \cup E_1 \in \mathcal{E}$, o que configura o caso base da indução. Agora consideremos o caso sucessor. Seja $k \geq 2$ um natural e suponhamos que, para toda sequência finita $E_0, \cdots, E_{k-1} \in \mathcal{E}$, vale $\bigcup_{i=0}^{k-1} E_i \in \mathcal{E}$. Seja $E_0, \cdots, E_k \in \mathcal{E}$ uma sequência finita. Então, por hipótese, $\bigcup_{i=0}^{k-1} E_i \in \mathcal{E}$ e, como $\mathcal{E}$ é de tipo 2, segue que

$$\bigcup_{i=0}^{k} E_i = \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} E_i\right) \cup E_k \in \mathcal{E}.$$

Assim, concluímos que, para todo natural $n \geq 2$, $\mathcal{E}$ é de tipo n. ($\Leftarrow$) A recíproca é óbvia. A demonstração para interseções é análoga. ■

Com esse resultado, concluímos que uma estrutura ser de tipo n para qualquer natural $n \geq 2$ é equivalente a ser de qualquer outro tipo natural $m \geq 2$, tanto para união como para interseção. Essa estruturas serão chamadas de estrutura de *tipo finito*. As proposições anteriores nos mostraram que estruturas de um tipo cardinal κ sempre são de tipos menores não nulos, e que, no caso de tipos finitos, qualquer uma é equivalente a qualquer outra; ou seja, sempre podemos descer o tipo da estrutura e, quando finito, podemos subir até $\aleph_0$. Isso nos sugere que o próximo passo é considerar estruturas em que $\kappa = \aleph_0$ e a seguinte pergunta: quando podemos subir mais nos tipos de estrutura? Provavelmente isso só foi possível no caso finito. Um outra pergunta válida é, como a cardinalidade de X influencia no tipo da estrutura? Provavelmente todas estrutura de tipo maior que $|X|$ são equivalentes a ser do tipo $|X|$. Como $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$, segue que qualquer união ou interseção de famílias de elementos de $\mathcal{E}$ deverá necessariamente ser equivalente a uma união de um conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$, e portanto terá cadinalidade menor que $2^{|X|}$. Por fim, vale ressaltar que o caso em que união e interseção são quaisquer não se enquadra nessa formalização, como por exemplo o caso de topologias. Nesse caso, uma possível nomenclatura para essas estruturas é *tipo universal*, e podem ser denotadas de tipo ∞, mas alguns cuidados devem ser tomados para adaptar as demostrações que seguirão. No entanto, como comentado acima, essas estruturas sempre têm um tipo cardinal que pode ser especificado, a saber $2^{|X|}$.

1.2 Estruturas fechadas por complementação

Definição 2. Sejam X um conjunto e κ, λ números cardinais. Uma *estrutura de complementação* de tipo (κ, λ) sobre X é uma estrutura $\mathcal{E}$ de tipo (κ, λ) sobre X tal que, para todo $E \in \mathcal{E}$,

$$E^{\complement} \in \mathcal{E}.$$

Das leis de complementação de união e interseção, segue a óbvia consequência:

Proposição 3. *Sejam X um conjunto, κ, λ números cardinais e $\mathcal{E}$ uma estrutura de complementação de tipo (κ, λ) sobre X. Então $\mathcal{E}$ é de tipo $(\max\{\kappa, \lambda\}, \max\{\kappa, \lambda\})$.*

Demonstração. Seja $\mu := \max\{\kappa, \lambda\}$ e $(M_i)_{i\in\mu}$ uma família de complexos de $\mathcal{E}$ e note que, para todo $i \in \mu$, $M_i \in \mathcal{E}$, da complementação de *est* vem que $(M_i)^{\complement} \in \mathcal{E}$. Se $\kappa = \mu$, segue que da complementação de $\mathcal{E}$ que

$$\bigcup_{i\in\mu} M_i = \left(\bigcap_{i\in\mu}(M_i)^{\complement}\right)^{\complement} \in \mathcal{E}.$$

Se $\lambda = \mu$, segue da mesma forma que

$$\bigcap_{i\in\mu} M_i = \left(\bigcup_{i\in\mu}(M_i)^{\complement}\right)^{\complement} \in \mathcal{E}.$$

$\blacksquare$

Por isso, podemos somente dizer que $\mathcal{E}$ é uma estrutura de complementação de tipo κ, sem nos preocuparmos com a interseção.

1.3 Estruturas geradas por conjuntos

Proposição 4. *Sejam X um conjunto, κ, λ números cardinais e $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ uma família de estruturas de tipo (κ, λ) sobre X. Então*

$$\mathcal{E} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$$

é uma estrutura de tipo (κ, λ) sobre X. Se $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ são de complementação, então $\mathcal{E}$ é de complementação.

Demonstração. Seja $(E_k)_{k\in\kappa}$ uma família de conjuntos de $\mathcal{E}$. Para todo $i \in I$ e todo $k \in \kappa$, $E_k \in \mathcal{E}$ implica que $E_k \in \mathcal{E}_i$, portanto $\bigcup_{k\in\kappa} E_k \in \mathcal{E}_i$. Isso implica que $\bigcup_{k\in\kappa} E_k \in \mathcal{E}$. Logo $\mathcal{E}$ é tem tipo de união κ sobre X. O mesmo vale analogamente para interseção e para complementação. ■

Definição 3. Sejam X um conjunto, κ, λ números cardinais e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. A (κ, λ)-estrutura sobre X *gerada* por $\mathcal{G}$ é o conjunto

$$\langle \mathcal{G} \rangle_{\kappa,\lambda} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i,$$

em $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ é uma indexação de todas as (κ, λ)-estruturas sobre X tais que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}_i$. A κ-estrutura de complementação sobre X *gerada* por $\mathcal{G}$ é o conjunto

$$\langle \mathcal{G} \rangle_{\kappa,\complement} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i,$$

em $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ é uma indexação de todas as κ-estruturas de complementação sobre X tais que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}_i$.

Proposição 5 (Estruturas geradas por recursão)**.** *Sejam X um conjunto, κ, λ números cardinais infinitos e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Então*

1. $\langle \mathcal{G} \rangle_{\kappa,1} = \left\{ \bigcup_{i\in\kappa} G_i \,\middle|\, (G_i)_{i\in\kappa} \in \mathcal{G}^\kappa \right\}$*;*

2. $\langle \mathcal{G} \rangle_{1,\lambda} = \left\{ \bigcap_{i\in\lambda} G_i \,\middle|\, (G_i)_{i\in\lambda} \in \mathcal{G}^\lambda \right\}$*;*

3. *Definimos recursivamente os seguintes conjuntos:*

   (a) $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}$*;*

   (b) Para todo ordinal sucessor α,

   $$\mathcal{G}_\alpha := \langle \mathcal{G}_{\alpha-1} \rangle_{\kappa,1} \cup \langle \mathcal{G}_{\alpha-1} \rangle_{1,\lambda};$$

   (c) Para todo ordinal limite α,

   $$\mathcal{G}_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} \mathcal{G}_\beta.$$

   Então $\langle \mathcal{G} \rangle_{\kappa,\lambda} = \mathcal{G}_\mu$, em que μ é o menor ordinal tal que $\max\{\kappa, \lambda\} < \mu$.

Demonstração. 1. Seja $\mathcal{U} := \{\bigcup_{i\in\kappa} G_i | \forall i \in \kappa, G_i \in \mathcal{G}\}$. Vamos primeiro mostrar que $\mathcal{U}$ é uma estrutura de tipo de união $\kappa, 1$ sobre X e que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$. Então, mostraremos que $\mathcal{U}$ está contido em toda estrutura de tipo de união κ sobre X de que $\mathcal{G}$ é subconjunto. Isso mostrará que $\langle\mathcal{G}\rangle = \mathcal{U}$, pois da definição de $\langle\mathcal{G}\rangle$ essa é a menor estrutura que contém $\mathcal{G}$.

Seja $(E_i)_{i\in\kappa} \in \mathcal{U}$. Então, para cada $i \in \kappa$, existe família $(G_j)_{j\in\kappa}$ de elementos de $\mathcal{G}$ tal que $E_i = \bigcup_{j\in\kappa} G_{ij}$. Disso segue que

$$\bigcup_{i\in\kappa} E_i = \bigcup_{i\in\kappa}\bigcup_{j\in\kappa} G_{ij} = \bigcup_{(i,j)\in\kappa\times\kappa} G_{i,j}.$$

Como, para todo cardinal infinito, vale $|\kappa \times \kappa| = \kappa$, então existe uma indexação $(G_k)_{k\in\kappa}$ de $(G_{i,j})_{(i,j)\in\kappa\times\kappa}$, e segue que

$$\bigcup_{i\in\kappa} E_i = \bigcup_{k\in\kappa} G_j.$$

Portanto $\bigcup_{i\in\kappa} E_i \in \mathcal{U}$. Isso mostra que $\mathcal{U}$ é uma estrutura de tipo κ sobre X. Ainda, vale $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$: basta considerar para cada $G \in \mathcal{G}$ a família constante $(G)_{i\in\kappa}$ cuja união é $\bigcup_{i\in\kappa} G = G$.

Agora, seja $\mathcal{E}$ um estrutura de tipo de união κ sobre X tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$. Seja $E \in \mathcal{U}$. Então existe família $(G_i)_{i\in\kappa}$ de elementos de $\mathcal{G}$ tal que $E = \bigcup_{i\in\kappa} G_i$. Como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$, então $(G_i)_{i\in\kappa}$ é uma família de elementos de $\mathcal{E}$ e segue que $E = \bigcup_{i\in\kappa} G_i \in \mathcal{E}$. Portanto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$.

2. Análoga à demonstração anterior.

3. Primeiro, vamos mostrar a seguinte propriedade: para todos ordinais α, β,

$$\beta < \alpha \Rightarrow \mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_\alpha$$

Usaremos indução em α. (1) Para o passo inicial, notamos que se $\alpha = 0$, então por vacuidade vale que, para todo $\alpha < 0$, $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{G}_0$. (2) Para o passo sucessor, consideremos que a proposição é verdadeira para todo ordinal menor ou igual a α e mostremos que ela é verdadeira para $\alpha+1$. Notemos que $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{G}_{\alpha+1}$, já que para todo $C \in \mathcal{G}_\alpha$ consideramos a família constante $(C)_{i\in\kappa}$, que tem união $\bigcup_{i\in\kappa} C = C$, portanto $C \in \langle\mathcal{G}_\alpha\rangle_{\kappa,1} \subseteq \mathcal{G}_{\alpha+1}$. Como temos, por hipótese, que para todo ordinal $\beta < \alpha$ vale $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_\alpha$, segue que para todo ordinal $\beta < \alpha + 1$ vale $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_{\alpha+1}$. (3) Agora, no passo limite, consideremos um ordinal limite α e suponhamos que a proposição é verdadeira para todo ordinal $\beta < \alpha$. Nesse caso, como por definição $\mathcal{G}_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \mathcal{G}_\beta$, segue que $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_\alpha$ para todo ordinal $\beta < \alpha$. Portanto terminamos a indução e concluímos que, para todos ordinais α e β tais que $\beta < \alpha$ vale que $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_\alpha$.

Mostraremos, agora, que $\mathcal{G}_\mu$ é uma (κ, λ)-estrutura. (1. κ-união) Seja $(C_i)_{i\in\kappa} \in (\mathcal{G}_\mu)^\kappa$. Então, para cada $i \in \kappa$, existe $\alpha_i \in \mu$ tal que $C_i \in \mathcal{G}_{\alpha_i}$. Definamos

$$\alpha := \sup_{i\in\kappa} \alpha_i = \bigcup_{i\in\kappa} \alpha_i.$$

Para todo $i \in \kappa$, como $\alpha_i \leq \alpha$, então $\mathcal{G}_{\alpha_i} \subseteq \mathcal{G}_\alpha$ pela propriedade no parágrafo anterior, o que implica $C_i \in \mathcal{G}_\alpha$. Notemos que $\alpha \in \mu$, pois $\kappa \in \mu$, $\alpha_i \in \mu$ para todo $i \in \kappa$, e uma união de κ elementos de cardinalidade menor que μ tem cardinalidade menor que μ. Portanto, como $C_i \in \mathcal{G}_\alpha$ para todo $i \in \kappa$, segue que

$$\bigcup_{i\in\kappa} C_i \in \mathcal{G}_{\alpha+1}$$

Como μ é ordinal limite, segue que $\alpha + 1 \in \mu$, e então $\mathcal{G}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{G}_\mu$, o que implica finalmente que $\bigcup_{i\in\kappa} C_i \in \mathcal{G}_\mu$. (2. λ-interseção) Análogo à união.

Por fim, mostremos que $\mathcal{G}_\mu$ é a menor (κ, λ)-estrutura de que $\mathcal{G}$ é subconjunto. Seja $\mathcal{E}$ uma (κ, λ)-estrutura tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$. Vamos mostrar que, para todo ordinal α, $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$. Usaremos indução em α. (1) Para o passo inicial, temos por hipótese que $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$. (2) Para o passo sucessor, seja α um ordinal e suponhamos que $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$. Seja $C \in \mathcal{G}_{\alpha+1}$. Então existe família $(C_i)_{i\in\kappa} \in (\mathcal{G}_\alpha)^\kappa$ tal que $C = \bigcup_{i\in\kappa} C_i$ ou existe família $(C_i)_{i\in\lambda} \in (\mathcal{G}_\alpha)^\lambda$ tal que $C = \bigcap_{i\in\lambda} C_i$. Em ambos os casos, como $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$, as família são famílias em $\mathcal{E}$. Como $\mathcal{E}$ é fechada por κ-união e por λ-interseção, em ambos os casos $C \in \mathcal{E}$, e assim concluímos que $\mathcal{G}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{E}$. (3) Para o passo limite, seja α um ordinal limite e suponhamos que para todo $\beta < \alpha$ vale $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{E}$. Então segue da definição de $\mathcal{G}_\alpha$ que

$$\mathcal{G}_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{E}.$$

Assim, concluímos que $\mathcal{G}_\mu \subseteq \mathcal{E}$.

■

Proposição 6 (Estruturas de complementação geradas por recursão)**.** *Sejam X um conjunto, κ, λ números cardinais infinitos e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Então*

1. $\langle \mathcal{G} \rangle_{1,\complement} = \left\{ C^\complement \middle| C \in \mathcal{G} \right\}$*;*
2. *Definimos recursivamente os seguintes conjuntos:*

(a) $\mathcal{G}_0 := \mathcal{G}$;

(b) Para todo ordinal sucessor α,

$$\mathcal{G}_\alpha := \langle \mathcal{G}_{\alpha-1} \rangle_{\kappa,1} \cup \langle \mathcal{G}_{\alpha-1} \rangle_{1,\complement};$$

(c) Para todo ordinal limite α,

$$\mathcal{G}_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{G}_\beta.$$

Então $\langle \mathcal{G} \rangle_{\kappa,\complement} = \mathcal{G}_\mu$, *em que* μ *é o menor ordinal tal que* $\kappa < \mu$.

Demonstração. 1. Evidente.

2. Pela mesma construção da demonstração anterior, concluímos que $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_\alpha$ para todos ordinais α, β tais que $\beta < \alpha$ (note que nenhuma hipótese sobre os conjuntos $\langle \mathcal{G}_{\alpha-1} \rangle_{1,\lambda}$ foi usada para o passo sucessor, e nenhuma precisa ser usada sobre $\langle \mathcal{G}_{\alpha-1} \rangle_{1,\complement}$).

   Mostremos que $\mathcal{G}_\mu$ é uma κ-estrutura de complementação. (1. κ-união) Seja $(C_i)_{i\in\kappa} \in (\mathcal{G}_\mu)^\kappa$. Então para cada $i \in \kappa$ existe um ordinal $\alpha_i \in \mu$ tal que $C_i \in \mathcal{G}_{\alpha_i}$. Seja $\alpha := \sup_{i\in\kappa} \alpha_i$. Então $\alpha < \mu$, pois $\kappa < \mu$, logo uma κ-união de conjuntos de cardinalidade menor que μ tem cardinalidade menor que μ. Pela propriedade demonstrada no parágrafo anterior, concluímos que $C_i \in \mathcal{G}_\alpha$ para todo $i \in \kappa$. Disso concluímos que $\bigcup_{i\in\kappa} C_i \in \mathcal{G}_{\alpha+1}$. Novamente, como $\alpha \in \mu$ e μ é um ordinal limite, segue que $\alpha + 1 \in \mu$; portanto

$$\bigcup_{i\in\kappa} C_i \in \mathcal{G}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{G}_\mu.$$

   (2. Complementação) Seja $C \in \mathcal{G}_\mu$. Então existe $\alpha \in \mu$ tal que $C \in \mathcal{G}_\alpha$, o que implica que $C^\complement \in \langle \mathcal{G}_\alpha \rangle_{1,\complement} \subseteq \mathcal{G}_{\alpha+1}$. Como μ é um ordinal limite segue que $\alpha + 1 \in \mu$, logo $\mathcal{G}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{G}_\mu$ pela propriedade do parágrafo anterior e, portanto, $C^\complement \in \mathcal{G}_\mu$. Isso termina a demonstração de que $\mathcal{G}_\mu$ é κ-estrutura de complementação.

   Por fim, mostraremos que $\mathcal{G}_\mu$ é a menor κ-estrutura de complementação de que $\mathcal{G}$ é subconjunto. Seja $\mathcal{E}$ uma κ-estrutura de complementação tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$. Vamos mostrar que, para todo ordinal α, $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$. Usaremos indução em α. (1) Para passo inicial, temos que por hipótese $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$. (2) Para o passo sucessor, seja α um ordinal e suponhamos que $\mathcal{G}_\alpha \subseteq \mathcal{E}$. Seja $C \in \mathcal{G}_{\alpha+1}$. Então existe uma família $(C_i)_{i\in\kappa} \in (\mathcal{G}_\alpha)^\kappa$ tal que $C = \bigcup_{i\in\kappa} C_i$ ou $C^\complement \in \mathcal{G}_\alpha$. Em ambos os casos, como $\mathcal{G}_\alpha \subseteq$

$\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}$ é fechada por κ-união e complementação, segue que $C \in \mathcal{E}$, portanto $\mathcal{G}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{E}$. (3) Para o passo limite, seja α é um ordinal limite e suponhamos que para todo $\beta < \alpha$ vale que $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{E}$. Então segue da definição de $\mathcal{G}_\alpha$ que

$$\mathcal{G}_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{E}.$$

Assim, concluímos que $\mathcal{C}_\mu \subseteq \mathcal{E}$.

■

1.4 Estruturas puxadas por funções

Definição 4. Sejam X e Y conjuntos, κ um número cardinal, $\mathcal{E}$ uma estrutura de tipo κ e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. A *estrutura puxada* por f é

$$f^\star(\mathcal{E}) := \left\{ f^{-1}(E) \middle| E \in \mathcal{E} \right\}.$$

Proposição 7. *Sejam X e Y conjuntos, κ um número cardinal, $\mathcal{E}$ uma estrutura de tipo κ e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. A estrutura puxada por f é uma estrutura de tipo κ sobre X.*

Demonstração. Seja $(E_i)_{i\in\kappa}$ uma família de conjuntos de $f^\star(\mathcal{E})$. Para todo $i \in \kappa$, existe $C_i \in \mathcal{E}$ tal que $E_i = f^{-1}(C_i)$. Segue de propriedades básicas de imagem inversa que

$$\bigcup_{i\in\kappa} E_i = \bigcup_{i\in\kappa} f^{-1}(C_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\kappa} C_i\right).$$

Como $\mathcal{E}$ é uma estrutura de tipo κ sobre Y, $\bigcup_{i\in\kappa} C_i \in \mathcal{E}$, o que implica que $\bigcup_{i\in\kappa} E_i \in f^\star(\mathcal{E})$. Logo $f^\star(\mathcal{E})$ é uma estrutura de tipo κ sobre X. ■

2 Os Morfismos

Definição 5. Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \mathcal{E}_X)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y, \mathcal{E}_Y)$ espaços estruturados. Uma *morfismo de estrutura* de X para $\boldsymbol{Y}$ é uma função $f : X \longrightarrow Y$ tal que, para todo $E \in \mathcal{E}_Y$,

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_X.$$

Proposição 8. *Propriedades categóricas.*

1. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço estruturado. Então id_X é um morfismo de estrutura.*
2. *Sejam $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{Z}$ espaços estruturados de tipo κ e $f : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Y}$ e $g : \boldsymbol{Y} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ morfismo de estrutura. Então $g \circ f : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ é um morfismo de estrutura.*

3 O Produto

Definição 6. Seja $(\boldsymbol{X_i})_{i\in I} = (X_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ uma família de espaços estruturados. O *produto* da família $(\boldsymbol{X_i})_{i\in I}$ é o par

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i} := \left(\prod_{i\in I} X_i, \left\langle \bigcup_{i\in I} \pi_i^{\star}(\mathcal{E}_i)\right\rangle\right).$$

Proposição 9. *Seja $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in I} = (X_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ uma família de espaços estruturados. Para todo $i \in I$, a projeção canônica $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ é um morfismo de estruturas.*

Demonstração. Sejam $i \in I$ e $E \in \mathcal{E}_i$. Então $\pi_i^{-1}(E) \in \pi_i^{\star}(\mathcal{E}_i)$ e, portanto, $\pi_i^{-1}(E) \in \bigcup_{i\in I} \pi_i^{\star}(\mathcal{E}_i)$. Logo $\pi_i^{-1}(E) \in \langle \bigcup_{i\in I} \pi_i^{\star}(\mathcal{E}_i)\rangle$. ■

Proposição 10 (Propriedade Universal)**.** *Sejam $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in I} = (X_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ uma família de espaços estruturados, $\boldsymbol{Y} = (Y, \mathcal{E}_Y)$ um espaço estruturado e, para todo $i \in I$, $f_i : \boldsymbol{Y} \longrightarrow \boldsymbol{X_i}$ um morfismo de estruturas. Então existe um único morfismo de estruturas $f : \boldsymbol{Y} \longrightarrow \prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i}$ tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ f = f_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd}
& \prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i} \arrow[d, "\pi_i"] \\
\boldsymbol{Y} \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & \boldsymbol{X_i}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} f : Y &\longrightarrow \prod_{i\in I} X_i \\ y &\longmapsto (f_i(y))_{i\in I}. \end{aligned}$$

Da propriedade universal para o produto de conjutos, f é a única função tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ f = f_i$. Resta mostrar que f é um morfismo de estruturas. Para simplificar a notação, definamos $(X, \mathcal{E}) := \prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i}$. Todo elemento de $\mathcal{E}$ é formado a partir de uniões, interseções ou complementações de elementos de $\bigcup_{i\in I} \pi_i^{\star}(\mathcal{E})$. Sendo assim, como f^{-1} preserva essas operações, se mostrarmos que, para todo $E \in \bigcup_{i\in I} \pi_i^{\star}(\mathcal{E}_i)$, vale $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_Y$, seguirá que, para todo $E \in \mathcal{E}$, vale $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_Y$.

Seja $E \in \bigcup_{i \in I} \pi_i^\star(\mathcal{E}_i)$. Então existe $i \in I$ tal que $E \in \pi_i^\star(\mathcal{E}_i)$ e, portanto, existe $E_i \in \mathcal{E}_i$ tal que $E = \pi_i^{-1}(E_i)$. Então segue que

$$f^{-1}(E) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(E_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(E_i) = f_i^{-1}(E_i)$$

e portanto, como f_i é morfismo de estruturas, $f_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{E}_Y$, portanto $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}_Y$. Isso prova, pelos comentários anteriores, que, para todo $E \in \mathcal{E}$, vale $f^{-1}(E) \in \mathcal{E}$ e, portanto, f é morfismo de estruturas. ∎

Rascunho

Demonstração antiga da sigma-álgebra

Quando a estrutura é fechada por complementação, no entanto, a construção de $\langle \mathcal{G} \rangle$ a partir de $\mathcal{G}$ é diferente, como no exemplo clássico das sigma-álgebras. A seguinte descrição é o exercício 15 do Terence Tao que pode ser achado aqui.

Proposição 11 (Descrição recursiva de uma sigma-álgebra gerada)**.** *Sejam $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ um conjunto de subconjutos de X e ω_1 o menor ordinal não enumerável. Defina os conjuntos $\mathcal{C}_\alpha$ para todo ordinal enumerável $\alpha \in \omega_1$ via indução transfinita como segue:*

1. $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C} \cup \{\emptyset\}$.

2. *Para todo ordinal sucessor α,*

$$\mathcal{C}_\alpha := \left\{ \bigcup_{i \in \omega_0} M_i \middle| \forall i \in \omega_0, M_i \in \mathcal{C}_{\alpha-1} \right\} \cup \left\{ \left(\bigcup_{i \in \omega_0} M_i \right)^{\complement} \middle| \forall i \in \omega_0, M_i \in \mathcal{C}_{\alpha-1} \right\}.$$

$$\mathcal{C}_\alpha := \langle \mathcal{C}_{\alpha-1} \rangle_{\omega_0,1} \cup \left\langle \langle \mathcal{C}_{\alpha-1} \rangle_{\omega_0,1} \right\rangle_{1,\complement}.$$

3. *Para todo ordinal limite $\alpha = \sup_{\beta \in \alpha} \beta$,*

$$\mathcal{C}_\alpha := \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{C}_\beta.$$

Então a sigma-álgebra gerada por $\mathcal{C}$ é

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \mathcal{C}_{\omega_1}.$$

Demonstração. Antes de mostrarmos que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ é sigma-álgebra, vamos mostrar que vale a seguinte propriedade: para todos ordinais α, β,

$$\beta < \alpha \Rightarrow \mathcal{C}_\beta \subseteq \mathcal{C}_\alpha$$

Usaremos indução em α. Num primeiro passo, notamos que se $\alpha = 0$, então por vacuidade vale que, para todo $\alpha < 0$, $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}_0$. Para o segundo passo, consideremos que a proposição é verdadeira para todo ordinal menor ou igual a α e mostremos que é verdadeira para $\alpha + 1$. Notemos que $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \mathcal{C}_{\alpha+1}$ já que para todo $M \in \mathcal{C}_\alpha$ consideramos a sequência constante $(M)_{i \in \omega_0}$, que tem união $\bigcup_{i\in\omega_0} M = M$, portanto $M \in \mathcal{C}_{\alpha+1}$. Nesse caso, como por hipótese, para todo ordinal $\beta < \alpha$ temos $\mathcal{C}_\beta \subseteq \mathcal{C}_\alpha$, segue que para todo ordinal $\beta < \alpha+1$ temos $\mathcal{C}_\beta \subseteq \mathcal{C}_{\alpha+1}$. Agora, no passo final, consideremos um ordinal limite α e suponhamos que a proposição é verdadeira para todo ordinal $\beta < \alpha$. Nesse caso, como por definição $\mathcal{C}_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \mathcal{C}_\beta$, segue que $\mathcal{C}_\beta \subseteq \mathcal{C}_\alpha$ para todo ordinal $\beta < \alpha$. Portanto terminamos a indução e concluímos que, para todos ordinais α e β tais que $\beta < \alpha$ vale que $\mathcal{C}_\beta \subseteq \mathcal{C}_\alpha$.

Mostremos que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ é uma sigma-álgebra. (1) $\emptyset \in \mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_{\omega_1}$. (2) Seja $M \in \mathcal{C}_{\omega_1}$. Então existe $\alpha \in \omega_1$ tal que $M \in \mathcal{C}_\alpha$. Nesse caso, temos que a sequência constante $(M)_{i\in\omega_0}$ tem união $\bigcup_{i\in\omega_0} M = M$, portanto da definição de $\mathcal{C}_{\alpha+1}$ segue que $M^\complement \in \mathcal{C}_{\alpha+1}$. Como $\alpha \in \omega_1$ e ω_1 é um ordinal limite, então $\alpha + 1 \in \omega_1$, e segue que $M^\complement \in \mathcal{C}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{C}_{\omega_1}$. (3) Agora, mostremos que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ é fechado por união enumerável. Seja $(M_i)_{i\in\omega_0}$ uma sequência de subconjuntos de $\mathcal{C}_{\omega_1}$. Então para cada $i \in \omega_0$ existe ordinal $\alpha_i \in \omega_1$ tal que $M_i \in \mathcal{C}_{\alpha_i}$. Seja $\alpha := \sup_{i\in\omega_0} \alpha_i$. Então $\alpha < \omega_1$, pois união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Pela propriedade demonstrada no parágrafo anterior, concluímos que $M_i \in \mathcal{C}_\alpha$ para todo $i \in \omega_0$. Disso concluímos que $\bigcup_{i\in\omega_0} M_i \in \mathcal{C}_{\alpha+1}$. Novamente, como $\alpha \in \omega_1$ e ω_1 é um ordinal limite, então $\alpha + 1 \in \omega_1$; portanto

$$\bigcup_{i\in\omega_0} M_i \in \mathcal{C}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{C}_{\omega_1},$$

e isso termina a demonstração de que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ é uma sigma-álgebra.

Devemos então mostrar que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ é a menor sigma-álgebra sobre X da qual $\mathcal{C}$ é subconjunto. Seja Σ uma sigma-álgebra tal que $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$. Mostraremos que $\mathcal{C}_{\omega_1} \subseteq \Sigma$ mostrando que $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \Sigma$ para todo ordinal α. Usaremos indução em α. No primeiro caso, notamos que $\mathcal{C}_0 \subseteq \Sigma$ pois $\emptyset \in \Sigma$ e por hipótese $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$. No segundo caso, seja α um ordinal, suponhamos que $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \Sigma$ e mostremos que $\mathcal{C}_{\alpha+1} \subseteq \Sigma$. Seja $M \in \mathcal{C}_{\alpha+1}$. Nesse caso, existe sequência $(M_i)_{i\in\omega_0}$ de conjuntos de $\mathcal{C}_\alpha$ tal que $M = \bigcup_{i\in\omega_0} M_i$ ou $M = (\bigcup_{i\in\omega_0} M_i)^\complement$. Como Σ é fechado por união enumerável e complementação e $\mathcal{C}_\alpha \subseteq \Sigma$, segue que $M \in \Sigma$, portanto $\mathcal{C}_{\alpha+1} \subseteq \Sigma$. No terceiro caso, se α é um ordinal limite e para todo $\beta < \alpha$ vale que $\mathcal{C}_\beta \subseteq \Sigma$, então segue que

$$\mathcal{C}_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \mathcal{C}_\beta \subseteq \Sigma.$$

Assim, concluímos que $\mathcal{C}_{\omega_1} \subseteq \Sigma$. ■

A propriedade essencial de ω_1 na demonstração está em mostrar que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ é fechado por união enumerável. Como os α_i são todos enumeráveis, sua união α também é e segue daí que $\alpha \in \omega_1$. O ordinal ω_1 não é usado em nenhum momento no último parágrafo para mostrar que $\mathcal{C}_{\omega_1}$ é a menor sigma-álgebra.

Isso significa que todos outros $\mathcal{C}_\alpha$ para $\alpha > \omega_1$ também estão contidos em qualquer sigma-álgebra Σ. De fato, a escolha de ω_1 é simplesmente estética, pois a partir de $\mathcal{C}_{\omega_1}$ todos os $\mathcal{C}_\alpha$ são a mesma sigma-álgebra.

Estruturas mais gerais e propriedades

Consideramos os pares $(X, \mathcal{E})$ em que X é um conjunto e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é um conjunto de subconjuntos de X. Queremos que esses conjuntos $\mathcal{E}$ tenham algumas propriedades boas, como topologias e sigma-álgebras têm envolvendo uniões e interseções. No entanto, antes de especificarmos quais propriedades são boas, consideraremos conjuntos $\mathcal{E}$ com uma propriedade genérica P. Para isso, poderíamos tomar uma propriedade P como qualquer proposição lógica, mas possíveis paradoxos podem surgir se não for tomado o devido cuidado. Portanto, como $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = \mathcal{P}^2(X)$, consideraremos uma propriedade P que $\mathcal{E}$ satisfaz como sendo equivalente a dizer que $\mathcal{E} \in P \subseteq \mathcal{P}^2(X)$.

Definição 7. Sejam X um conjunto e $P \subseteq \mathcal{P}^2(X)$. Uma *$P$-estrutura* sobre X é um conjunto $\mathcal{E} \in P$ de subconjuntos de X.

Estruturas geradas

Proposição 12. *Sejam X um conjunto, $P \in \mathcal{P}^2(X)$ e $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ uma família de P-estruturas sobre X. Então*

$$\mathcal{E} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{E}_i$$

é uma P-estrutura sobre X.

Demonstração. Para todo $i \in I$, $\mathcal{E}_i \in P$ ∎