Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} -4 & & \\ & 1 & \\ & & 6 \end{bmatrix} Q^t$$

$$Q^t Q = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

PULINUS

Álgebra Linear e suas Aplicações

Notas de Aula

Petronio Pulino

Departamento de Matemática Aplicada

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Universidade Estadual de Campinas

E–mail: pulino@ime.unicamp.br

www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/

Janeiro de 2012

Conteúdo

5

Produto Interno

Conteúdo

5.1 Introdução

Na geometria Euclidiana as propriedades que nos possibilitam expressar o comprimento de vetor e o ângulo entre dois vetores são denominadas de propriedades métricas. No estudo do $I\!R^n$, em geometria analítica, definimos comprimento de vetores e ângulo entre vetores através do produto escalar

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \qquad \text{para} \qquad x, \; y \in I\!R^n \; .$$

Nosso objetivo é de estender esses conceitos para os espaços vetoriais sobre um corpo $I\!F$. O conceito de produto interno em um espaço vetorial real (complexo) é uma generalização do conceito de produto escalar definido em $I\!R^n$. Faremos essa generalização através do estudo de certos tipos de aplicações que são definidas sobre pares de elementos de um espaço vetorial e tomando valores no corpo.

Denotamos o **produto interno** entre dois elementos u e v de um espaço vetorial da seguinte forma: $\langle \, u \, , \, v \, \rangle$. Neste capítulo apresentamos um estudamos das propriedades geométricas que são atribuídas a um espaço vetorial por meio de algum produto interno definido sobre ele. Mais especificamente, estabelecemos as propriedades básicas, e suas aplicações, dos conceitos de comprimento, ângulo e ortogonalidade determinadas ao espaço vetorial pelo produto interno.

5.2 Definição de Produto Interno

Definição 5.2.1 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $I\!R$. Uma aplicação*

$$\langle \, \cdot \, , \, \cdot \, \rangle : V \times V \longrightarrow I\!R$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Simetria: $\langle \, u \, , \, v \, \rangle = \langle \, v \, , \, u \, \rangle \quad ; \quad \forall \; u, \; v \in V$

(2) Positividade: $\langle \, u \, , \, u \, \rangle \geq 0 \quad ; \quad \forall \; u \in V, \quad$ *com* $\langle \, u \, , \, u \, \rangle = 0 \iff u = 0_V$

(3) Distributividade: $\langle \, u + w \, , \, v \, \rangle = \langle \, u \, , \, v \, \rangle + \langle \, w \, , \, v \, \rangle \quad ; \quad \forall \; u, \; v, \; w \in V$

(4) Homogeneidade: $\langle \, \lambda u \, , \, v \, \rangle = \lambda \langle \, u \, , \, v \, \rangle \quad ; \quad \forall \; u, \; v \in V$ *e* $\lambda \in I\!R$

define um ***produto interno*** *no espaço vetorial real V.*

Utilizando as propriedades de simetria, distributividade e homogeneidade tem–se

- $\langle u , v + w \rangle = \langle u , v \rangle + \langle u , w \rangle$ para todos $u, v, w \in V$.
- $\langle u , \lambda v \rangle = \lambda \langle u , v \rangle$ para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$.

Assim, dizemos que o produto interno, em um espaço vetorial real, é uma **aplicação bilinear**, isto é, é uma aplicação linear nas duas variáveis.

Definição 5.2.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$. Uma aplicação*

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) Simetria Hermitiana: $\langle u , v \rangle = \overline{\langle v , u \rangle}$; $\forall \; u, v \in V$

(2) Positividade: $\langle u , u \rangle \geq 0$; $\forall \; u \in V$, *com* $\langle u , u \rangle = 0 \iff u = 0_V$

(3) Distributividade: $\langle u + w , v \rangle = \langle u , v \rangle + \langle w , v \rangle$; $\forall \; u, v, w \in V$

(4) Homogeneidade: $\langle \lambda u , v \rangle = \lambda \langle u , v \rangle$; $\forall \; u, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$

define um ***produto interno*** *no espaço vetorial complexo V.*

Podemos verificar que com as propriedades de simetria Hermitiana, distributividade e homogeneidade temos que:

- $\langle u , v + w \rangle = \langle u , v \rangle + \langle u , w \rangle$ para todos $u, v, w \in V$.
- $\langle u , \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u , v \rangle$ para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$.

É importante observar que em um espaço vetorial complexo o produto interno possui a propriedade de simetria Hermitiana, que é necessária para garantir a propriedade de positividade. De fato, considere um elemento $u \in V$ não–nulo, como V é um espaço vetorial complexo, tem–se que o elemento $iu \in V$. Logo, obtemos

$$\langle iu , iu \rangle = i\,i \langle u , u \rangle = -1 \langle u , u \rangle < 0$$

que é uma contradição, proveniente da não utilização da simetria Hermitiana.

Considerando agora a propriedade de simetria Hermitiana, tem–se que

$$\langle iu , iu \rangle = i\bar{i} \langle u , u \rangle = \langle u , u \rangle > 0 ,$$

o que mostra a necessidade da propriedade de simetria Hermitiana.

Definição 5.2.3 *Um* ***espaço vetorial com produto interno****, que denotamos por* $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ *é um espaço vetorial* V *sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *com produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Um espaço vetorial real com produto interno é denominado* ***espaço Euclidiano****. Um espaço vetorial complexo com produto interno é denominado* ***espaço unitário****.*

Exemplo 5.2.1 *Seja* $\beta = \{ e_1, \cdots , e_n \}$ *a base canônica do* $\mathbb{R}^n$. *Todo elemento* $x = (x_1, \cdots , x_n) \in \mathbb{R}^n$ *é escrito de modo único da seguinte forma:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i \, .$$

Em muitas situações, por simplicidade de notação, associamos o elemento $x \in \mathbb{R}^n$ *a matriz coluna* $X \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, *tendo em vista que os espaços vetoriais são isomorfos,*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Desse modo, o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ *que vamos denotar por* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, *denominado produto interno Euclidiano, pode ser escrito como:*

$$\langle \, x \, , \, y \, \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i = Y^t \, X = Y^t \, I_n \, X \qquad \text{para todos} \qquad x, \; y \in \mathbb{R}^n \, ,$$

onde $I_n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é a matriz identidade de ordem* n.

De modo análogo, no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^n$ *o produto interno usual, denominado produto interno Hermitiano, é escrito da seguinte forma:*

$$\langle \, x \, , \, y \, \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \overline{y}_i = Y^* \, X = Y^* \, I_n \, X \qquad \text{para todos} \qquad x, \; y \in \mathbb{C}^n \, .$$

onde Y^* *é a transposta Hermitiana da matriz coluna* Y.

Exemplo 5.2.2 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([a, b])$. *O produto interno usual é definido da seguinte forma:*

$$\langle \, f \, , \, g \, \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \qquad ; \qquad \forall \; f, \; g \in \mathcal{C}([a, b]) \, .$$

Exemplo 5.2.3 *No espaço vetorial real* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *o produto interno usual é definido da seguinte forma:*

$$\langle \, A \, , \, B \, \rangle = tr(B^t \, A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, b_{ij} \qquad ; \qquad \forall \; A, \; B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \, .$$

Exemplo 5.2.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([a,b])$ *e o elemento* $w \in \mathcal{C}([a,b])$ *estritamente positivo. A aplicação* $\langle \cdot , \cdot \rangle_w$ *definida por:*

$$\langle f , g \rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \quad ; \quad \forall f, g \in \mathcal{C}([a,b]),$$

define um produto interno com peso no espaço vetorial $\mathcal{C}([a,b])$.

Exemplo 5.2.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$. *Verifique se as aplicações abaixo definem um produto interno em* $\mathbb{R}^n$.

1. $\langle x , y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \, | y_i |$

2. $\langle x , y \rangle = \left| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|$

3. $\langle x , y \rangle = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j \right)$

Exemplo 5.2.6 *Seja* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* T *um automorfismo de* V. *Mostre que a aplicação*

$$\begin{aligned} f(\cdot,\cdot) : \ V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longrightarrow f(u,v) = \langle T(u) , T(v) \rangle \end{aligned}$$

define um produto interno em V.

Para mostrar que a aplicação $f(\cdot,\cdot)$ satisfaz as propriedades de *simetria*, *distributividade* e *homogeneidade*, basta utilizar a hipótese que T é um operador linear e em seguida a hipótese que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ é um produto interno em V.

Para mostrar que a aplicação $f(\cdot,\cdot)$ é *positiva* vamos utilizar a hipótese que T é um isomorfismo, isto é, T é um operador injetor ($Ker(T) = \{ 0_V \}$), e a hipótese que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ é um produto interno em V. De fato,

$$f(u,u) = \langle T(u) , T(u) \rangle \geq 0 ,$$

pois $\langle \cdot , \cdot \rangle$ é um produto interno em V, e temos que

$$f(u,u) = \langle T(u) , T(u) \rangle = 0 \iff T(u) = 0_V \iff u = 0_V ,$$

pois T é um operador injetor, o que completa a prova.

Dada uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ vamos definir o operador linear T_A sobre o $\mathbb{R}^n$ associado à matriz $A = [a_{ij}]$ da seguinte forma: $y = T_A(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, onde a i–ésima componente do elemento $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ é dada por:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad ; \qquad i = 1, \cdots, n\,.$$

Desse modo, podemos representar o elemento $y = T_A(x)$ na forma de matriz coluna como $Y = AX$, onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A notação utilização para representar o operador T_A será muito útil no exemplo a seguir.

Exemplo 5.2.7 *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Mostre que se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica, então $\langle T_A(x) , y \rangle = \langle x , T_A(y) \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, onde T_A é operador linear associado à matriz simétrica A.*

Inicialmente, considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com a base canônica, vamos representar os elementos $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ na forma de matriz coluna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Finalmente, escrevendo o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ na forma matricial e utilizando a hipótese que A é uma matriz simétrica, temos que

$$\langle T_A(x) , y \rangle = Y^t A X = (A^t Y)^t X = (AY)^t X = \langle x , T_A(y) \rangle ,$$

mostrando o resultado desejado.

Exemplo 5.2.8 *Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e T um operador linear sobre V. Se $\langle T(u) , T(v) \rangle = \langle u , v \rangle$ para todos $u, v \in V$, então T é um operador injetor.*

Sabemos que T é um operador injetor se, e somente se, $Ker(T) = \{ 0_V \}$. Tomando um elemento $u \in Ker(T)$, isto é, $T(u) = 0_V$, e utilizando a hipótese, temos que

$$0_{\mathbb{R}} = \langle T(u) , T(u) \rangle = \langle u , u \rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = 0_V\,.$$

Portanto, $Ker(T) = \{ 0_V \}$, o que mostra o resultado desejado.

Matriz do Produto Interno

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base ordenada de V. Vamos mostrar que o produto interno pode ser completamente descrito em termos de uma dada base por meio de uma determinada matriz.

Considere os elementos $u, v \in V$, que podem ser representados de modo único da forma:

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \qquad \text{e} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \, .$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
\langle u , v \rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} x_j v_j , v \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \langle v_j , v \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \langle v_j , v \rangle \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \langle v_j , v_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle v_j , v_i \rangle x_j \, \overline{y}_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, x_j \, \overline{y}_i \\
&= Y^* A X
\end{aligned}$$

onde $X , Y \in \mathbb{M}_{n\times1}(\mathbb{F})$ são as matrizes de coordenadas dos elementos u e v em relação à base ordenada β, respectivamente, isto é,

$$X = [u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y = [v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} ,$$

e a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ com os elementos dados por:

$$a_{ij} = \langle v_j , v_i \rangle \qquad \text{para} \qquad i, j = 1, \cdots , n \, ,$$

é denominada **matriz do produto interno em relação à base ordenada** β.

Podemos verificar facilmente que A é uma matriz Hermitiana. De fato,

$$a_{ij} = \langle v_j , v_i \rangle = \overline{\langle v_i , v_j \rangle} = \overline{a}_{ji}$$

para $i, j = 1, \cdots, n$. Portanto, mostramos que $A^* = A$.

Da propriedade de positividade do produto interno, temos que

$$\langle u , u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, x_j \, \overline{x}_i = X^* A X > 0$$

para todo $u \neq 0_V$. Desse modo, temos que a matriz de coordenadas

$$X = [u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})} .$$

Portanto, temos que

$$X^* A X > 0 \qquad \text{para todo} \qquad X \neq 0_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})} . \tag{5.1}$$

Além disso, sabemos também que

$$\langle u , u \rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = 0_V .$$

Assim, temos que

$$X^* A X = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = 0_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})} . \tag{5.2}$$

Como A é Hermitiana e satisfaz a propriedade (5.1), dizemos que A é uma matriz **positiva–definida**. As matrizes positiva–definidas serão estudadas com mais detalhes nas seções 6.4 e 6.7, onde iremos fazer uma caracterização, facilitando sua identificação.

Finalmente, podemos observar que a matriz do produto interno A deve ser invertível. De fato, caso contrário, existiria um elemento $X \neq 0_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})}$ tal que $AX = 0_{\mathbb{F}^n}$, o que leva a uma contradição com a propriedade (5.1), pois teríamos

$$X^t A X = 0$$

para $X \neq 0_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})}$.

Exemplo 5.2.9 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *munido com o produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e com a base canônica* $\beta = \{ e_1, \cdots , e_n \}$. *Podemos verificar facilmente que* I_n *é a matriz do produto interno usual com relação à base canônica* β.

Exemplo 5.2.10 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *munido com o produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e com a base ordenada* $\Gamma = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ *dada por:*

$$v_1 = (1, 0, -1) \quad , \quad v_2 = (1, 2, 1) \quad e \quad v_3 = (0, -3, 2) \, .$$

Podemos verificar facilmente que a matriz $A = [a_{ij}]$ *dada por:*

$$a_{ij} \;=\; \langle v_j \, , \, v_i \rangle \;=\; \langle v_i \, , \, v_j \rangle \;=\; a_{ji} \qquad \Longrightarrow \qquad A \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

é a matriz do produto interno usual com relação à base ordenada Γ.

Exemplo 5.2.11 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *munido com o produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e com a base ordenada* $\Gamma = \{ v_1, v_2 \}$ *dada por:*

$$v_1 = (1, -1) \qquad e \qquad v_2 = (1, 1) \, .$$

Podemos verificar facilmente que a matriz $A = [a_{ij}]$ *dada por:*

$$a_{ij} \;=\; \langle v_j \, , \, v_i \rangle \;=\; \langle v_i \, , \, v_j \rangle \;=\; a_{ji} \qquad \Longrightarrow \qquad A \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é a matriz do produto interno usual com relação à base ordenada Γ.

Exemplo 5.2.12 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com o produto interno*

$$\langle p \, , \, q \rangle \;=\; \int_0^1 p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall \; p, \, q \;\in\; \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \, .$$

Podemos verificar facilmente que a matriz $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

é a matriz do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *com relação à base canônica*

$$\beta \;=\; \{ \, p_1(x) \;=\; 1 \; , \; p_2(x) \;=\; x \; , \; p_3(x) \;=\; x^2 \, \} \, ,$$

que é a matriz de Hilbert de ordem 3.

Exemplo 5.2.13 *Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com o produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall\ p,\, q \,\in\, \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\,.$$

Podemos verificar facilmente que a matriz $A \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ dada por:

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

é a matriz do produto interno $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ com relação à base canônica

$$\beta \;=\; \{\, p_1(x) \,=\, 1 \;,\; p_2(x) \,=\, x \;,\; p_3(x) \,=\, x^2 \;,\; p_4(x) \,=\, x^3 \,\}\,.$$

Para exemplificar a utilização da matriz do produto interno, considere os polinômios $p,\, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dados por:

$$p(x) \;=\; 1 \,+\, 2x \,+\, x^3 \qquad \text{e} \qquad q(x) \;=\; 3 \,+\, x \,-\, x^2\,.$$

Desse modo, o produto interno entre os elementos $p,\, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, isto é,

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx,$$

pode ser calculado da seguinte forma:

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; Y^t A X \;=\; \frac{106}{15}\,,$$

onde $X\,,\,Y \,\in\, \mathbb{M}_{4\times1}(\mathbb{R})$ são as matrizes de coordenadas dos elementos p e q em relação à base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, respectivamente, isto é,

$$X \;=\; [p]_\beta \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Y \;=\; [q]_\beta \;=\; \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\,.$$

É importante observar que a utilização da matriz do produto interno torna o cálculo do produto interno em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ mais simples, envolvendo somente produto de matrizes.

Exemplo 5.2.14 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *com a base canônica*

$$\beta = \{ e_1, \cdots, e_n \} .$$

Podemos descrever todos os produtos internos sobre $\mathbb{R}^n$ *através de suas matrizes em relação à base canônica.*

De fato, considere uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ satisfazendo as propriedades:

$$A^t = A \quad \text{e} \quad X^t A X > 0 \quad \text{para todo} \quad X \neq 0_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})} ,$$

e definimos o produto interno entre os elementos $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$u = (x_1, \cdots, x_n) \quad \text{e} \quad v = (y_1, \cdots, y_n) ,$$

da seguinte forma:

$$\langle u , v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, x_j\, y_i = Y^t A X$$

onde $X , Y \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ são as matrizes de coordenadas dos elementos u e v em relação à base canônica β, respectivamente, isto é,

$$X = [u]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = [v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} .$$

Portanto, fixando uma base ordenada β para um espaço vetorial V de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$, digamos $dim(V) = n$, podemos obter uma descrição de todos os produtos internos possíveis sobre V. De fato, se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ é uma matriz com as propriedades:

$$A^* = A \quad \text{e} \quad X^* A X > 0 \quad \text{para todo} \quad X \neq 0_{\mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})} ,$$

então A é a matriz de algum produto interno sobre V em relação à base ordenada β. Sendo assim, esse produto interno é definido da seguinte forma:

$$\langle u , v \rangle = Y^* A X ,$$

onde $X , Y \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{F})$ são as matrizes de coordenadas dos elementos u e v em relação à base ordenada β, respectivamente.

Exercícios

Exercício 5.1 *Seja* V *um espaço vetorial real. Considere que* $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ *e* $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ *são dois produtos internos em* V. *Prove que a aplicação* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *dada por:*

$$\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle_1 + \langle u, v\rangle_2 \quad ; \quad u, v \in V$$

define um novo produto interno em V.

Exercício 5.2 *Sejam* V *um espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *e* $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *uma base de* V. *Dados os escalares* $c_1, \cdots, c_n$, *mostre que existe um único elemento* $u \in V$ *tal que*

$$\langle u, v_i\rangle = c_i \quad \textit{para} \quad i = 1, \cdots, n\,.$$

Exercício 5.3 *Considere o espaço vetorial real* U *definido por:*

$$U = \{\, p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!R) \ / \ p(-1) = p(1) = 0 \,\}\,.$$

Mostre que a aplicação

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)dx \quad ; \quad \forall\ p, q \in U\,.$$

define um produto interno em U.

Exercício 5.4 *Considere o espaço vetorial real* V *definido por:*

$$V = \{\, f \in \mathcal{C}^1([a,b]) \ / \ f(a) = f(b) = 0 \,\}\,.$$

Mostre que a aplicação definida por:

$$F(f,g) = \int_a^b f^{'}(x)g^{'}(x)dx \quad ; \quad \forall\ f, g \in V$$

define um produto interno em V.

Exercício 5.5 *Verifique se a aplicação definida por:*

$$F(f,g) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)dx \quad ; \quad \forall\ f,\ g \in \mathcal{C}([0,1])$$

define um produto interno em $\mathcal{C}([0,1])$.

Exercício 5.6 *Mostre que a aplicação* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{P}_2(I\!R) \times \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R$ *dada por:*

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

define um produto interno no espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

Exercício 5.7 *Considere o espaço vetorial real* $I\!M_{m\times n}(I\!R)$*, isto é, o espaço vetorial das matrizes de ordem* $m \times n$ *sobre o corpo* $I\!R$*. Mostre que a aplicação*

$$\langle A \,,\, B \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \;=\; tr(B^t A) \qquad ; \qquad \forall\ A,\, B \in I\!M_{m\times n}(I\!R)\,,$$

define um produto interno sobre $I\!M_{m\times n}(I\!R)$*.*

Exercício 5.8 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^2$ *e a matriz diagonal* D *dada por:*

$$D \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Mostre que a aplicação

$$\langle x \,,\, y \rangle_D \;=\; y^t D x$$

define um produto interno em $I\!R^2$*, considere os elementos de* $I\!R^2$ *representados na forma de vetor coluna.*

Exercício 5.9 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^n$ *e a matriz diagonal* D *dada por:*

$$D \;=\; diag(d_1,\, \cdots,\, d_n)$$

com $d_i > 0$ *para* $i = 1, \cdots, n$*. Mostre que a aplicação*

$$\langle x \,,\, y \rangle_D \;=\; y^t\, D\, x$$

define um produto interno em $I\!R^n$*, considere os elementos de* $I\!R^n$ *representados na forma de vetor coluna.*

Exercício 5.10 *Sejam o espaço vetorial real* $I\!M_{2\times 1}(I\!R)$ *e uma matriz* $A \in I\!M_2(I\!R)$*. Mostre que a aplicação*

$$f_A(X,Y) \;=\; Y^t A X \qquad ; \qquad \forall\ X,\, Y \in I\!M_{2\times 1}(I\!R)\,,$$

define um produto interno sobre $I\!M_{2\times 1}(I\!R)$ *se, e somente se,* $A^t = A$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ *e* $\det(A) > 0$*.*

Exercício 5.11 *Mostre que a aplicação*

$$\langle u \,,\, v \rangle \;=\; x_1\, y_1 \;-\; x_1\, y_2 \;-\; y_1\, x_2 \;+\; 4x_2\, y_2$$

define um produto interno em $I\!R^2$*, onde* $u = (x_1,\, x_2)$ *e* $v = (y_1,\, y_2)$*. Determine a matriz do produto interno* $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ *com relação à base canônica do* $I\!R^2$*.*

Exercício 5.12 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *munido com o produto interno*

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle \;=\; p(-1)q(-1) \;+\; p(0)q(0) \;+\; p(1)q(1)$$

para todos $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(a) *Determine a matriz do produto interno* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *em relação à base canônica*

$$\beta \;=\; \{\, p_1(x) \;=\; 1 \;,\; p_2(x) \;=\; x \;,\; p_3(x) \;=\; x^2 \,\}\,.$$

(b) *Considere os polinômios* $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *dados por:*

$$p(x) \;=\; -1 \;+\; 3x \;+\; x^2 \qquad e \qquad q(x) \;=\; 4 \;+\; 2x \;-\; x^2\,.$$

Determine o produto interno entre os elementos $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *utilizando a matriz do produto interno, isto é,*

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle \;=\; Y^t A X\;,$$

onde A *é a matriz do produto interno e* $X, Y \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ *são as matriz de coordenadas dos polinômios* p, q *com relação à base canônica, respectivamente.*

(c) *Determine todos os polinômios* $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *tais que*

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle \;=\; 0$$

utilizando a matriz do produto interno.

Exercício 5.13 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *com o produto interno*

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)x^2dx \qquad ; \qquad \forall\; p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})\,.$$

Determine a matriz do produto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *em relação à base canônica*

$$\beta \;=\; \{\, p_1(x) \;=\; 1 \;,\; p_2(x) \;=\; x \;,\; p_3(x) \;=\; x^2 \;,\; p_4(x) \;=\; x^3 \,\}\,.$$

Considere o polinômio $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *dado por:*

$$p(x) \;=\; 2 \;-\; x \;+\; 4x^2 \;+\; x^3\,.$$

Determine o produto interno $\langle\, p\,,\, p\,\rangle$ *utilizando a matriz do produto interno, isto é,*

$$\langle\, p\,,\, p\,\rangle \;=\; X^t A X\;,$$

onde A *é a matriz do produto interno e* $X \in \mathbb{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ *é a matriz de coordenadas do polinômio* p *com relação à base canônica.*

5.3 Desigualdade de Cauchy–Schwarz

Teorema 5.3.1 *Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Então, para todos $u , v \in V$ temos que*

$$\langle u , v \rangle^2 \leq \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle .$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os elementos u e v são linearmente dependentes.

Demonstração – No caso em que os elementos u e v são linearmente dependentes, a igualdade é obtida trivialmente. Vamos considerar u e v linearmente independentes, isto é, $u + \lambda v \neq 0_V$ para todo $\lambda \in I\!R$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \langle u + \lambda v , u + \lambda v \rangle &= \langle u , u \rangle + \langle u , \lambda v \rangle + \langle \lambda v , u \rangle + \lambda^2 \langle v , v \rangle \\ &= \langle u , u \rangle + 2 \lambda \langle u , v \rangle + \lambda^2 \langle v , v \rangle > 0 \end{aligned}$$

é uma inequação de segundo grau na variável λ.

Note que a equação do segundo grau

$$\langle u , u \rangle + 2 \lambda \langle u , v \rangle + \lambda^2 \langle v , v \rangle = 0$$

não possui raízes reais. Assim, devemos ter

$$4 \langle u , v \rangle^2 - 4 \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle < 0 \implies \langle u , v \rangle^2 < \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle$$

o que completa da demonstração. ■

Exemplo 5.3.1 *Considere o espaço vetorial real $I\!R^3$ munido do produto interno usual. Verifique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para $u = (1, -2, 1)$ e $v = (3, -1, 1)$.*

Exemplo 5.3.2 *Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([-1, 1])$ com o produto interno usual*

$$\langle f , g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx \qquad ; \qquad \forall \ f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \ .$$

Verifique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para os elementos $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$.

Teorema 5.3.2 *Seja V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Então, para todo $u , v \in V$ temos que*

$$| \langle u , v \rangle |^2 \leq \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle .$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os elementos u e v são linearmente dependentes.

Demonstração – No caso em que os elementos u e v são linearmente dependentes, a igualdade é obtida trivialmente. Vamos considerar u e v linearmente independentes, isto é, $u + \lambda v \neq 0_V$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} 0 < \langle u + \lambda v , u + \lambda v \rangle &= \langle u , u \rangle + \langle u , \lambda v \rangle + \langle \lambda v , u \rangle + | \lambda |^2 \langle v , v \rangle \\ &= \langle u , u \rangle + \overline{\lambda} \langle u , v \rangle + \lambda \langle v , u \rangle + | \lambda |^2 \langle v , v \rangle \end{aligned}$$

Para o caso complexo, vamos escrever $\langle v , u \rangle \in \mathbb{C}$ da seguinte forma

$$\langle v , u \rangle = \exp(i \theta) \, | \langle v , u \rangle | \qquad ; \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

assim, temos que

$$\overline{\langle v , u \rangle} = \langle u , v \rangle = \exp(-i \theta) \, | \langle v , u \rangle |$$

Desse modo, temos que

$$\langle u , u \rangle + 2Re(\lambda \exp(i \theta)) \, | \langle u , v \rangle | + | \lambda |^2 \langle v , v \rangle > 0$$

chamando $\beta = \lambda \exp(i \theta) \in \mathbb{C}$, note que $| \lambda |^2 = | \beta |^2$, e observando que $| Re(\beta) | \leq | \beta |$. Assim, encontramos

$$\langle u , u \rangle + 2 | \beta | \, | \langle u , v \rangle | + | \beta |^2 \langle v , v \rangle > 0$$

podemos concluir que a função quadrática em $| \beta |$ não possui raízes reais. Desse modo, temos que

$$4 | \langle u , v \rangle |^2 - 4 \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle < 0 \implies | \langle u , v \rangle |^2 < \langle u , u \rangle \langle v , v \rangle$$

o que completa a demonstração. ■

5.4 Definição de Norma. Norma Euclidiana

Definição 5.4.1 (Norma) *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma norma, ou comprimento, em V é uma aplicação $\| \cdot \|$ que para cada elemento $u \in V$ associa um número real $\| u \|$, que possui as seguintes propriedades:*

(a) Positividade: $\| u \| > 0$ *para* $u \neq 0_V$, *com* $\| u \| = 0 \iff u = 0_V$.

(b) Homogeneidade: $\| \lambda u \| = | \lambda | \, \| u \|$ *para todo* $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

(c) Desigualdade Triangular: $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$ *para todos* $u, v \in V$.

Um espaço vetorial V munido de uma norma $\| \cdot \|$ é denominado **espaço normado**, que denotamos por $(V, \| \cdot \|)$.

Exemplo 5.4.1 *No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ temos as seguintes normas*

(a) Norma do Máximo: $\| x \|_\infty = \max\{ \, | x_i | \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \, \}$

(b) Norma–1 ou Norma do Táxi: $\| x \|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} | x_i |$

Podemos verificar facilmente que as aplicações $\| \cdot \|_\infty$ e $\| \cdot \|_1$ satisfazem as propriedades de norma utilizando as propriedades de módulo de um número real.

Exemplo 5.4.2 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. A aplicação*

$$\| A \|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

define uma norma em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 5.4.3 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. A aplicação*

$$\| A \|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \quad ; \quad 1 \leq j \leq n \right\}$$

define uma norma em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Teorema 5.4.1 *Seja* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *. Então, a aplicação* $q(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida da seguinte forma:*

$$q(u) = \sqrt{\langle u , u \rangle} \qquad ; \qquad \forall \, u \in V \, ,$$

satisfaz as propriedades de norma:

(a) Positividade: $q(u) > 0$ *para* $u \neq 0_V$, *com* $q(u) = 0 \iff u = 0_V$

(b) Homogeneidade: $q(\lambda u) = |\lambda| \, q(u)$ *para todo* $u \in V$, $\lambda \in \mathbb{F}$

(c) Desigualdade Triangular: $q(u + v) \leq q(u) + q(v)$ *para todos* $u , v \in V$

Demonstração – Vamos provar que a aplicação $q(\cdot)$ define uma norma em V com relação ao produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, que denotamos por $\| \cdot \|_2$, denominada **Norma Euclidiana**. As propriedades **(a)** e **(b)** seguem das propriedades de produto interno.

Para mostrar que a aplicação $\| \cdot \|_2$ satisfaz a propriedade da desigualdade triangular, utilizamos a desigualdade de Cauchy–Schwarz escrita da forma:

$$|\langle u , v \rangle| \leq \| u \|_2 \, \| v \|_2 \qquad \text{para todos} \qquad u , v \in V \, .$$

Temos que

$$\| u + v \|_2^2 = \langle u + v , u + v \rangle = \langle u , u \rangle + \langle u , v \rangle + \langle v , u \rangle + \langle v , v \rangle$$

Inicialmente considerando um espaço vetorial real, tem–se que

$$\| u + v \|_2^2 = \langle u , u \rangle + 2 \langle u , v \rangle + \langle v , v \rangle \leq \langle u , u \rangle + 2 \, |\langle u , v \rangle| + \langle v , v \rangle$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz, obtemos

$$\| u + v \|_2^2 \leq \langle u , u \rangle + 2 \| u \|_2 \| v \|_2 + \langle v , v \rangle = \| u \|_2^2 + 2 \| u \|_2 \| v \|_2 + \| v \|_2^2$$

$$\| u + v \|_2^2 \leq (\| u \|_2 + \| v \|_2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \| u + v \|_2 \leq \| u \|_2 + \| v \|_2$$

o que completa a prova para o caso de um espaço vetorial real.

Finalmente, para um espaço vetorial complexo, temos que

$$\begin{aligned} \| u + v \|_2^2 &= \langle u \,,\, u \rangle + \langle u \,,\, v \rangle + \overline{\langle u \,,\, v \rangle} + \langle v \,,\, v \rangle \\ &= \langle u \,,\, u \rangle + 2\, Re(\langle u \,,\, v \rangle) + \langle v \,,\, v \rangle \\ &\leq \langle u \,,\, u \rangle + 2\, | Re(\langle u \,,\, v \rangle) | + \langle v \,,\, v \rangle \\ &\leq \langle u \,,\, u \rangle + 2\, | \langle u \,,\, v \rangle | + \langle v \,,\, v \rangle \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz, obtemos

$$\| u + v \|_2^2 \leq \langle u \,,\, u \rangle + 2 \| u \|_2 \| v \|_2 + \langle v \,,\, v \rangle = \| u \|_2^2 + 2 \| u \|_2 \| v \|_2 + \| v \|_2^2$$

Portanto, temos que

$$\| u + v \|_2^2 \leq (\| u \|_2 + \| v \|_2)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \| u + v \|_2 \leq \| u \|_2 + \| v \|_2$$

o que completa a demonstração. ■

Definição 5.4.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma aplicação*

$$\begin{aligned} d(\cdot,\cdot) : \; V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longrightarrow d(u,v) \end{aligned}$$

com as propriedades:

(a) Positividade: *$d(u,v) \geq 0$, com $d(u,v) = 0 \iff u = v$*

(b) Simetria: *$d(u,v) = d(v,u) \quad ; \quad \forall\; u, v \in V$*

(c) Desigualdade Triangular: *$d(u,v) \leq d(u,w) + d(v,w) \quad ; \quad \forall\; u, v, w \in V$*

*define uma **métrica**, ou **distância**, no espaço vetorial V.*

Um espaço vetorial V munido de uma métrica $d(\cdot,\cdot)$ é denominado **espaço métrico**, que denotamos por $(V, d(\cdot,\cdot))$.

Teorema 5.4.2 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com uma norma $\| \cdot \|$. A aplicação*

$$\begin{aligned} d(\cdot,\cdot) : \; V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longrightarrow d(u,v) = \| u - v \| \end{aligned}$$

*define uma **métrica** no espaço vetorial V.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 5.4.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([0,1])$*. A aplicação*

$$\| f \|_\infty = \max\{ \, | f(x) | \quad , \quad x \in [0,1] \, \}$$

define uma norma em $\mathcal{C}([0,1])$*. Dada a função* $f(x) = 1 - \exp(-x)$*, calcular* $\| f \|_\infty$*.*

Exemplo 5.4.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([0,1])$*. A aplicação*

$$\| f \|_1 = \int_0^1 | f(x) | \, dx \qquad ; \qquad \forall \, f \in \mathcal{C}([0,1])$$

define uma norma em $\mathcal{C}([0,1])$*.*

Exemplo 5.4.6 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido do produto interno usual*

$$\langle \, f \, , \, g \, \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx \qquad ; \qquad \forall \, f, \, g \in \mathcal{C}([0,1])$$

Sabemos que a aplicação $\| f \|_2 = \sqrt{\langle \, f \, , \, f \, \rangle}$ *define uma norma em* $\mathcal{C}([0,1])$*. Dada a função* $f(x) = \cos(\pi \, x)$*, calcular* $\| f \|_2$*.*

Exemplo 5.4.7 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido do produto interno usual. Verifique a desigualdade de Cauchy–Schwarz para as funções* $f(x) = x$ *e* $g(x) = x^2$*.*

Exemplo 5.4.8 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido do produto interno usual e* $\| \cdot \|_2$ *a norma Euclidiana. Dadas as funções* $f(x) = x$ *e* $g(x) = x^2$*, determine* $d(f,g) = \| f - g \|_2$*.*

Utilizando a definição da métrica Euclidiana, temos que

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \| f - g \|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (x - x^2)^2 dx} \\ &= \sqrt{\int_0^1 (\, x^2 - 2x^3 + x^4 \,) dx} = \frac{\sqrt{30}}{30} \, . \end{aligned}$$

5.5 Definição de Ângulo. Ortogonalidade

Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Observe que utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz mostramos que para quaisquer elementos não–nulos $u, v \in V$ o quociente

$$\frac{\langle u , v \rangle}{\| u \|_2 \, \| v \|_2}$$

está no intervalo $[-1, 1]$. Desse modo, existe um número real $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\frac{\langle u , v \rangle}{\| u \|_2 \, \| v \|_2} = \cos(\theta) .$$

Além disso, existe um único valor $\theta \in [0, \pi]$ satisfazendo a igualdade. Assim, podemos ter a noção de ângulo entre dois elementos de um espaço vetorial munido com um produto interno, que será compatível com a definição de ortogonalidade que apresentamos a seguir.

Definição 5.5.1 (Ângulo) *Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. O Ângulo entre dois elementos não–nulos $u, v \in V$ é definido como sendo o valor $\theta \in [0, \pi]$ que satisfaz a equação*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u , v \rangle}{\| u \|_2 \, \| v \|_2} .$$

Definição 5.5.2 (Ortogonalidade) *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dizemos que os elementos $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u , v \rangle = 0$, e denotamos por $u \perp v$.*

Podemos observar facilmente que

$$\langle u , v \rangle = 0 \iff \cos(\theta) = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq \pi ,$$

mostrando a compatibilidade entre os conceitos de ângulo e ortogonalidade.

Teorema 5.5.1 *Num espaço vetorial V munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, temos as seguintes propriedades:*

1. $0_V \perp v$ *para todo* $v \in V$;
2. $u \perp v$ *implica* $v \perp u$;
3. *Se* $v \perp u$ *para todo* $u \in V$, *então* $v = 0_V$;
4. *Se* $v \perp w$ *e* $u \perp w$, *então* $(v + u) \perp w$;
5. *Se* $v \perp u$ *e* λ *é um escalar, então* $\lambda v \perp u$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 5.5.1 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido do produto interno usual. Determine o ângulo entre as funções* $f(x) = x$ *e* $g(x) = x^2$*, de acordo com a geometria gerada no espaço vetorial pelo produto interno usual.*

Definição 5.5.3 *Considere* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$*. Seja* $S = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ *um conjunto de elementos de* V *com* $\langle v_i , v_j \rangle = 0$ *para* $i \neq j$*. Então, dizemos que* S *é um* ***conjunto ortogonal*** *em* V *com relação ao produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$*. Além disso, se* $\| v_j \|_2 = 1$ *para* $j = 1 , \cdots , n$*, dizemos que* S *é um* ***conjunto ortonormal*** *em* V*.*

Teorema 5.5.2 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $S = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ *um conjunto ortogonal em* V *com elementos* $v_j \neq 0_V$ *para* $j = 1 , \cdots , n$*. Então,* S *é linearmente independente em* V*.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 5.5.3 (Teorema de Pitágoras) *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma proveniente do produto interno. Então, os elementos* $u , v \in V$ *são ortogonais se, e somente se,*

$$\| v + u \|_2^2 = \| u \|_2^2 + \| v \|_2^2 .$$

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 5.5.4 (Lei do Paralelogramo) *Sejam* V *um espaço vetorial complexo com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma proveniente do produto interno. Então, para todos* $u, v \in V$ *tem–se que*

$$\| v + u \|_2^2 + \| u - v \|_2^2 = 2 \| u \|_2^2 + 2 \| v \|_2^2 .$$

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Proposição 5.5.1 (Lei dos Cossenos) *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$*,* $\| \cdot \|_2$ *a norma proveniente do produto interno e os elementos* $u, v \in V$ *não–nulos. Se* θ *é o ângulo entre os elementos* u *e* v*, então*

$$\| u \pm v \|_2^2 = \| u \|_2^2 + \| v \|_2^2 \pm 2 \| u \|_2 \| v \|_2 \cos(\theta) .$$

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 5.5.2 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ *com o produto interno usual*

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad ; \qquad \forall\;\; f,g \;\in\; \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \;\; .$$

O conjunto $\{\ \sin(x),\ \sin(2x),\ \cdots,\ \sin(nx),\ \cdots\ \}$ *é ortogonal com relação ao produto interno usual de* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$.

Basta utilizar a seguinte identidade trigonométrica

$$\sin(nx)\,\sin(mx) \;=\; \frac{\cos((n-m)x) \;-\; \cos((n+m)x)}{2}\,,$$

simplificando o cálculo das integrais, para obter o resultado desejado.

Exemplo 5.5.3 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ *com o produto interno usual*

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad ; \qquad \forall\;\; f,g \;\in\; \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \;\; .$$

O conjunto $\{\ 1,\ \cos(x),\ \cos(2x),\ \cdots,\ \cos(nx),\ \cdots\ \}$ *é ortogonal com relação ao produto interno usual de* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$.

Basta utilizar a seguinte identidade trigonométrica

$$\cos(nx)\,\cos(mx) \;=\; \frac{\cos((n-m)x) \;+\; \cos((n+m)x)}{2}\,,$$

simplificando o cálculo das integrais, para obter o resultado desejado.

De fato, por simplicidade vamos utilizar a seguinte notação

$$\varphi_k(x) \;=\; \cos(kx) \qquad \text{para} \qquad k \;=\; 0,\, 1,\, 2,\, \cdots,\, n,\, \cdots\, .$$

Para $n \,=\, m \,=\, 0$ temos

$$\langle\, \varphi_0 \,,\, \varphi_0 \,\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx \;=\; 2\pi\,.$$

Para $n \,=\, m \,\neq\, 0$, utilizando a identidade trigonométrica acima, temos que

$$\begin{aligned}\langle\, \varphi_n \,,\, \varphi_n \,\rangle \;&=\; \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)dx \\[2mm] &=\; \pi \;+\; \frac{1}{4n}\sin(2nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \;=\; \pi\,.\end{aligned}$$

Para $n \neq m$, utilizando a identidade trigonométrica acima, temos que

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_n \,,\, \varphi_m \rangle &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x)dx \;+\; \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)dx \\
&= \frac{1}{2(n-m)}\sin((n-m)x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \;+\; \frac{1}{2(n+m)}\sin((n+m)x)\Big|_{-\pi}^{\pi} \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos o resultado desejado.

Exemplo 5.5.4 *Sejam V um espaço vetorial complexo com o produto interno $\langle \cdot \,,\, \cdot \rangle$ e $\| \cdot \|_2$ a norma proveniente do produto interno. Vamos mostrar que o produto interno fica completamente determinado pela sua "parte real", isto é, o produto interno pode ser representado da seguinte forma:*

$$\langle u \,,\, v \rangle \;=\; Re(\langle u \,,\, v \rangle) \;+\; iRe(\langle u \,,\, iv \rangle)$$

para todos $u, v \in V$.

De fato, se $z \in \mathbb{C}$, então $Im(z) = Re(-iz)$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned}
\langle u \,,\, v \rangle &= Re(\langle u \,,\, v \rangle) \;+\; iIm(\langle u \,,\, v \rangle) \\
&= Re(\langle u \,,\, v \rangle) \;+\; iRe(-i\langle u \,,\, v \rangle) \\
&= Re(\langle u \,,\, v \rangle) \;+\; iRe(\langle u \,,\, iv \rangle)
\end{aligned}$$

o que completa a prova da afirmação.

Exemplo 5.5.5 *Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$ munido do produto interno usual, e os elementos $x, y \in \mathbb{C}^3$, representados na forma de vetor coluna, dados por:*

$$X \;=\; \begin{bmatrix} i \\ 2+3i \\ 1+2i \end{bmatrix} \qquad e \qquad Y \;=\; \begin{bmatrix} 3-i \\ 4-2i \\ 5+3i \end{bmatrix}\,.$$

Desse modo, temos que

$$\langle x \,,\, y \rangle \;=\; Y^*X \;=\; 12 \;+\; 26i\,.$$

Podemos observar facilmente que

$$\begin{aligned}
\langle x \,,\, y \rangle &= Re(\langle u \,,\, v \rangle) \;+\; iRe(-i\langle u \,,\, v \rangle) \\
&= 12 \;+\; iRe(\,26 \;-\; 12i\,) \\
&= 12 \;+\; 26i
\end{aligned}$$

exemplificando a propriedade descrita acima.

Exercícios

Exercício 5.14 *Sejam* $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ *reais quaisquer. Mostre que*

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{(\,a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\,)}{n}\,,$$

utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz em $I\!R^n$.

Exercício 5.15 *Sejam* $a_1,\ \cdots,\ a_n$ *reais estritamente positivos. Mostre que*

$$(\,a_1 + \cdots + a_n\,)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2\,,$$

utilizando a desigualdade de Cauchy–Schwarz em $I\!R^n$.

Exercício 5.16 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *com o produto interno*

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall\ p,\, q\, \in\, \mathcal{P}_2(I\!R)\,.$$

Dados os polinômios

$$p(x) = x + 2 \quad , \quad q(x) = 3x - 2 \qquad e \qquad h(x) = x^2 - 3\,,$$

determine

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle \quad , \quad \langle\, p+q\,,\, q\,\rangle \quad , \quad \|\, p\,\|_2 \quad , \quad \|\, q+h\,\|_2 \quad , \quad d(p,h) \qquad e \qquad \cos(\theta)\,,$$

onde θ *é o ângulo entre os polinômios* $p(x)$ *e* $h(x)$.

Exercício 5.17 *Considere o espaço vetorial real* $I\!M_{2\times 3}(I\!R)$ *com o produto interno usual*

$$\langle\, A\,,\, B\,\rangle = tr(B^tA)\,.$$

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad e \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

determine

$$\langle\, A\,,\, B\,\rangle \quad , \quad \langle\, A+B\,,\, C\,\rangle \quad , \quad \|\, A\,\|_2 \quad , \quad \|\, B\,\|_2 \qquad e \qquad \cos(\theta)\,,$$

onde θ *é o ângulo entre as matrizes* A *e* B.

Exercício 5.18 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^4$ *munido do produto interno usual. Determine os valores do parâmetro* α *de modo que os elementos* $u = (1,2,\alpha,3)$ *e* $v = (\alpha,2,\alpha,-2)$ *sejam ortogonais, isto é,* $\langle\, u\,,\, v\,\rangle = 0$.

Exercício 5.19 *Mostre que a aplicação* $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{P}_1(I\!R) \times \mathcal{P}_1(I\!R) \longrightarrow I\!R$ *dada por*

$$\langle p , q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{P}_1(I\!R)$. *Determine todos os polinômios* $q(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(I\!R)$ *que são ortogonais ao polinômio* $p(x) = 1 + x$ *com relação ao produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Resposta: $\boxed{q(x) = a\left(1 - \frac{3}{2}x\right) \quad , \quad a \in I\!R}$

Exercício 5.20 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_1(I\!R)$ *munido do produto interno*

$$\langle f , g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \, .$$

Determine todos os polinômios $q(x) = a + bx \in \mathcal{P}_1(I\!R)$ *que são ortogonais ao polinômio* $p(x) = 1 + x$ *com relação ao produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Resposta: $\boxed{q(x) = a\left(1 - \frac{9}{5}x\right) \quad , \quad a \in I\!R}$

Exercício 5.21 *Seja* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma Euclidiana. Sejam* $u, v \in V$ *não–nulos. Prove que* $\langle u , v \rangle = 0$ *se, e somente se,* $\| u + \alpha v \|_2 \geq \| u \|_2$ *para todo* $\alpha \in I\!R$.

Exercício 5.22 *Seja* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Mostre que*

$$\| u \|_2 = \| v \|_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle u + v , u - v \rangle = 0 \, ,$$

para todos $u , v \in V$.

Exercício 5.23 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *munido do produto interno usual. Dados o elementos* $u = (1, 1, 0)$ *e* $v = (0, 1, 1)$, *determine o elemento* $w \in I\!R^3$ *de modo que* $\| w \|_2 = 1$ *e* $\langle u , w \rangle = \langle v , w \rangle = 0$. *Dê uma interpretação geométrica.*

Exercício 5.24 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Dadas as funções* $g(x) = \exp(-x)$ *e* $f(x) = x$. *Determine*

(a) $\langle f , g \rangle$.

(b) $\| f \|_\infty$, $\| g \|_\infty$, $\| f \|_2$ *e* $\| g \|_2$.

(c) $d(f,g) = \| f - g \|_1$.

(d) $d(f,g) = \| f - g \|_\infty$.

(e) *Verificar a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada às funções* f *e* g .

(f) *Verificar a desigualdade triangular* $\| f + g \|_1 \leq \| f \|_1 + \| g \|_1$.

Exercício 5.25 *Considere* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma proveniente do produto interno. Mostre que se os elementos* $u , v \in V$ *são ortogonais, então*

$$\| v + u \|_2^2 = \| u \|_2^2 + \| v \|_2^2 .$$

A recíproca é verdadeira ? Justifique sua resposta.

Exercício 5.26 *Considere* V *um espaço vetorial complexo com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma proveniente do produto interno. Mostre que*

$$\| u \pm v \|_2^2 = \| u \|_2^2 \pm 2Re(\langle u , v \rangle) + \| v \|_2^2$$

para todos $u, v \in V$.

Exercício 5.27 *Considere* V *um espaço vetorial real com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma proveniente do produto interno. Mostre que*

$$\langle u , v \rangle = \frac{1}{4}\| u + v \|_2^2 - \frac{1}{4}\| u - v \|_2^2$$

para todos $u, v \in V$.

Exercício 5.28 *Considere* V *um espaço vetorial complexo com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma proveniente do produto interno. Mostre que*

$$\begin{aligned} \langle u , v \rangle &= \frac{1}{4}\| u + v \|_2^2 - \frac{1}{4}\| u - v \|_2^2 \\ &+ \frac{i}{4}\| u + iv \|_2^2 - \frac{i}{4}\| u - iv \|_2^2 \end{aligned}$$

para todos $u, v \in V$.

Exercício 5.29 *Seja V um espaço vetorial complexo munido com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Mostre que o ângulo entre dois elementos não–nulos $u, v \in V$ pode ser definido, sem ambiguidade, como sendo o valor $\theta \in \left[0 \,, \dfrac{\pi}{2} \right]$ que satisfaz a equação*

$$\cos(\theta) \;=\; \frac{|\langle u \,, v \rangle|}{\| u \|_2 \, \| v \|_2} \,.$$

Exercício 5.30 *Sejam V um espaço vetorial real e $\| \cdot \|$ uma norma em V que satisfaz a Lei do Paralelogramo, isto é,*

$$\| u + v \|^2 \;+\; \| u - v \|^2 \;=\; 2\| u \|^2 \;+\; 2\| v \|^2$$

para todos $u, v \in V$. Mostre que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definida por:

$$\langle u \,, v \rangle \;=\; \frac{1}{4} \left(\| u + v \|^2 \;-\; \| u - v \|^2 \right)$$

para todos $u, v \in V$, define um produto interno em V tal que

$$\| u \|^2 \;=\; \langle u \,, u \rangle$$

para todo $u \in V$.

Exercício 5.31 *Considere o espaço vetorial $\mathcal{C}([0,1])$ munido do produto interno usual. Determine uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que seja ortogonal com a função $g(x) = x^2$, de acordo com a geometria gerada no espaço vetorial pelo produto interno usual.*

5.6 Base Ortogonal. Coeficientes de Fourier

Definição 5.6.1 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Dizemos que uma base $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ de V é uma* ***base ortogonal*** *se β é um conjunto ortogonal em V. No caso em que o conjunto β é ortonormal, dizemos que β é uma* ***base ortonormal*** *de V.*

Teorema 5.6.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ uma base ortogonal de V. Então, todo elemento $u \in V$ é escrito de modo único da seguinte forma:*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, q_i \qquad \textit{com} \qquad \alpha_i = \frac{\langle u , q_i \rangle}{\langle q_i , q_i \rangle} .$$

Neste caso, as coordenadas de u com relação à base ortogonal β são denominadas ***coeficientes de Fourier*** *de u com relação à base ortogonal β.*

Demonstração – Dado um elemento $u \in V$, como $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ é uma base para V, pelo Teorema 3.7.1, existem escalares $\alpha_1, \cdots , \alpha_n$ tais que o elemento u é escrito de modo único como:

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, q_j .$$

Fazendo o produto interno entre o elemento u e um elemento q_i da base ortogonal β, obtemos

$$\langle u , q_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle q_j , q_i \rangle = \alpha_i \langle q_i , q_i \rangle \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots , n .$$

Assim, temos que as coordenadas, coeficientes de Fourier, do elemento u em relação à base ortogonal β são dadas por:

$$\alpha_i = \frac{\langle u , q_i \rangle}{\langle q_i , q_i \rangle} \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots , n .$$

No caso em que β é uma base ortonormal, temos que os coeficientes de Fourier do elemento u são dados por:

$$\alpha_i = \langle u , q_i \rangle \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots , n ,$$

o que completa a demonstração. ■

Definição 5.6.2 *Sejam* V *um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\beta = \{ q_1, \cdots , q_n \}$ *um conjunto ortogonal em* V *com elementos* $q_j \neq 0_V$ *para* $j = 1 , \cdots , n$. *Os* ***coeficientes de Fourier*** *do elemento* $u \in V$ *relativos ao conjunto ortogonal* β *são definidos como:*

$$\alpha_i = \frac{\langle u , q_i \rangle}{\langle q_i , q_i \rangle} \qquad para \qquad i = 1, \cdots , n ,$$

em homenagem ao matemático Francês ***Jean Baptiste Fourier***.

Exemplo 5.6.1 *Considere o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}([0, 2\pi])$ *definido por:*

$$\mathbb{C}([0, 2\pi]) = \{ f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \ / \ f \ \text{é uma função contínua} \} ,$$

isto é, o espaço vetorial das funções complexas contínuas definidas em $[0, 2\pi]$, *onde a operação de adição e a operação de multiplicação por escalar são as mesmas definidas no espaço das funções reais. Uma função* $f \in \mathbb{C}([0, 2\pi])$ *é escrita da seguinte forma:*

$$f(x) = f_1(x) + i\, f_2(x) \qquad para \qquad x \in [0, 2\pi] ,$$

onde f_1 *e* f_2 *são funções reais contínuas em* $[0, 2\pi]$.

Definimos em $\mathbb{C}([0, 2\pi])$ *o seguinte produto interno*

$$\langle f , g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx .$$

Podemos verificar facilmente que o subconjunto S *de* $\mathbb{C}([0, 2\pi])$ *definido por:*

$$S = \{ f_k(x) = \exp(ikx) \ ; \ x \in [0, 2\pi] \quad e \quad k = -r, \cdots , -1, 0, 1, \cdots , r \}$$

é um ***conjunto ortogonal*** *em* $\mathbb{C}([0, 2\pi])$. *Além disso, temos que* $\langle f_k , f_k \rangle = 2\pi$.

De fato, para $m \neq n$, e lembrando que $\exp(ikx) = \cos(kx) + i \sin(kx)$, temos que

$$\langle f_n , f_m \rangle = \int_0^{2\pi} \exp(inx) \exp(-imx)dx = \frac{1}{n-m} \exp(i(n-m)x) \bigg|_0^{2\pi} = 0 ,$$

Além disso, temos que

$$\langle f_k , f_k \rangle = \int_0^{2\pi} \exp(ikx) \exp(-ikx)dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi ,$$

o que completa a demonstração.

Exemplo 5.6.2 *Considere o espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}([0,2\pi])$ *com o produto interno*

$$\langle f\,,\,g\rangle \;=\; \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

e o conjunto ortogonal

$$S \;=\; \{\; f_k(x) \;=\; \exp(ikx) \;\;;\;\; x \in [0,2\pi] \quad e \quad k \;=\; -m, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, m\}\,.$$

Os ***coeficientes de Fourier*** *de uma função* $f \in \mathbb{C}([0,2\pi])$ *relativos ao conjunto ortogonal* S *são dados por:*

$$\alpha_k \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{\exp(ikx)}dx \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx)dx$$

para $k = -m, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, m$.

Para exemplificar, os coeficientes de Fourier da função $f(x) = x$ são dados por:

$$\alpha_k \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,\overline{\exp(ikx)}dx \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,\exp(-ikx)dx \;=\; -\frac{1}{ik}$$

para $k \neq 0$. De fato, usando a técnica de integração por partes, obtemos

$$\int_0^{2\pi} x\,\exp(-ikx)dx \;=\; -\frac{x}{ik}\exp(-ikx)\Big|_0^{2\pi} \;+\; \int_0^{2\pi}\exp(-ikx)dx\,.$$

Agora, temos que

$$-\frac{x}{ik}\exp(-ikx)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{ik}\exp(-i2k\pi) \;=\; -\frac{2\pi}{ik}\,(\,\cos(2k\pi) \;-\; i\sin(2k\pi)\,) \;=\; -\frac{2\pi}{ik}\,.$$

$$\int_0^{2\pi}\exp(-ikx)dx \;=\; -\frac{1}{ik}\exp(-ikx)\Big|_0^{2\pi} \;=\; -\frac{1}{ik}\,(\,\cos(2k\pi) \;-\; 1\,) \;=\; 0\,.$$

Assim, obtemos os coeficientes α_k para $k \neq 0$.

Para $k = 0$, temos que

$$\alpha_0 \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx \;=\; \pi\,.$$

Exemplo 5.6.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ *com o produto interno usual*

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad ; \qquad \forall\;\; f,g \;\in\; \mathcal{C}([-\pi,\pi])\,.$$

Considere o subespaço vetorial

$$W \;=\; \{\; f \;\in\; \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \;\;/\;\; f(-x) \;=\; -f(x) \;\}\,.$$

Sabemos que $\beta \;=\; \{\sin(x)\,,\,\sin(2x)\,,\,\cdots,\,\sin(nx)\,\}$ *é um conjunto ortogonal em* W*.*

Os coeficientes de Fourier da função $f(x) \;=\; x$*, para* $x \;\in\; [-\pi,\pi]$*, com relação ao conjunto ortogonal* β*, são dados por:*

$$\alpha_k \;=\; \begin{cases} \dfrac{2}{k} & , \quad k \;\; impar \\[2ex] -\dfrac{2}{k} & , \quad k \;\; par \end{cases}$$

para $k \;=\; 1,\;\cdots\;,\;n$*.*

Exemplo 5.6.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *munido do produto interno usual. Seja* $\beta \;=\; \{\;(1,1),\;(-1,1)\;\}$ *uma base ortogonal para* $\mathbb{R}^2$*. Calcular as coordenadas do elemento* $v \;=\; (3,4) \;\in\; \mathbb{R}^2$ *em relação à base ortogonal* β*.*

Por simplicidade, chamando $q_1 \;=\; (1,1)$ e $q_2 \;=\; (-1,1)$, temos que o elemento $v \in \mathbb{R}^2$ é escrito de modo único da seguinte forma:

$$v \;=\; \frac{\langle\, v\,,\,q_1\,\rangle}{\langle\, q_1\,,\,q_1\,\rangle}\,q_1 \;+\; \frac{\langle\, v\,,\,q_2\,\rangle}{\langle\, q_2\,,\,q_2\,\rangle}\,q_2 \;=\; \frac{7}{2}\,q_1 \;+\; \frac{1}{2}\,q_2\,.$$

Assim, o vetor de coordenadas de $v \in \mathbb{R}^2$ em relação à base ortogonal β é dado por:

$$[v]_\beta \;=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}\,,$$

onde os coeficientes de Fourier do elemento v em relação à base ortogonal β são

$$\alpha_1 \;=\; \frac{7}{2} \qquad \text{e} \qquad \alpha_2 \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Exemplo 5.6.5 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ *com o produto interno usual*

$$\langle\, f\,,\, g\,\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad ; \qquad \forall\;\; f,g\;\in\;\mathcal{C}([-\pi,\pi])\,.$$

Considere o subespaço vetorial

$$U \;=\; \{\; f\;\in\;\mathcal{C}([-\pi,\pi])\;\;/\;\; f(-x)\;=\;f(x)\;\}\,.$$

Sabemos que $\gamma \;=\; \{\,1\,,\,\cos(x)\,,\,\cos(2x)\,,\,\cdots,\,\cos(nx)\,\}$ *é um conjunto ortogonal em* U*.*

Vamos calcular os coeficientes de Fourier da função $f(x) \;=\; x^2$*, para* $x\in[-\pi,\pi]$*, com relação ao conjunto ortogonal* γ*.*

Por simplicidade vamos utilizar a seguinte notação

$$\varphi_0(x) \;=\; 1\;, \qquad \varphi_k(x) \;=\; \cos(kx) \qquad \text{para} \qquad k\;=\;1,\,\cdots\,,\,n\,.$$

Do Exemplo 5.5.3, sabemos que

$$\langle\,\varphi_0\,,\,\varphi_0\,\rangle \;=\; 2\pi \qquad \text{e} \qquad \langle\,\varphi_k\,,\,\varphi_k\,\rangle \;=\; \pi \qquad \text{para} \qquad k\;=\;1,\,\cdots\,,\,n\,.$$

Podemos verificar facilmente que

$$\langle\, f\,,\,\varphi_k\,\rangle \;=\; \frac{4\pi}{k^2}\cos(k\pi) \qquad \text{para} \qquad k\;=\;1,\,\cdots\,,\,n\,.$$

Desse modo, obtemos

$$\alpha_0 \;=\; \frac{\langle\, f\,,\,\varphi_0\,\rangle}{\langle\,\varphi_0\,,\,\varphi_0\,\rangle} \;=\; \frac{\pi^2}{3}$$

$$\alpha_k \;=\; \frac{\langle\, f\,,\,\varphi_k\,\rangle}{\langle\,\varphi_k\,,\,\varphi_k\,\rangle} \;=\; \begin{cases} \dfrac{4}{k^2} & , \quad k \;\;\text{par} \\[2ex] -\dfrac{4}{k^2} & , \quad k \;\;\text{impar} \end{cases} \qquad \text{para} \qquad k\;=\;1,\,\cdots\,,\,n$$

que são os coeficientes de Fourier da função f com relação ao conjunto ortogonal γ.

5.7 Processo de Gram–Schmidt

Teorema 5.7.1 *Considere V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Sejam $v_1 , v_2 , \cdots , v_n , \cdots$ uma seqüência finita ou infinita de elementos de V e $S_k = [v_1 , \cdots , v_k]$ o subespaço gerado pelos k primeiros elementos. Então, existe uma seqüência correspondente de elementos $q_1 , q_2 , \cdots , q_n , \cdots$ em V a qual possui as seguintes propriedades:*

(a) O elemento q_k é ortogonal a todo elemento do subespaço $[q_1 , \cdots , q_{k-1}]$.

(b) O subespaço $S_k = [v_1 , \cdots , v_k]$ é igual ao subespaço $W_k = [q_1 , \cdots , q_k]$.

(c) A seqüência $q_1 , q_2 , \cdots , q_n , \cdots$ é única, a menos de uma constante multiplicativa, isto é, se existir uma outra seqüência $q'_1 , q'_2 , \cdots , q'_n , \cdots$, de elementos de V satisfazendo as propriedades (a) e (b), então existem escalares $c_k \in \mathbb{F}$ tais que $q'_k = c_k \, q_k$ para $k = 1, 2, \cdots , n, \cdots$.

Demonstração – Vamos construir os elementos $q_1 , q_2 , \cdots , q_n , \cdots$ por um processo de indução sobre k. Inicialmente, escolhemos $q_1 = v_1$. Agora vamos assumir que já construímos os elementos $q_1 , \cdots , q_r$ tais que *(a)* e *(b)* são satisfeitas quando $k = r$.

Desse modo, definimos o elemento q_{r+1} pela equação

$$q_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, q_i \,,$$

onde os escalares $\alpha_i \in \mathbb{F}$ são escolhidos de modo conveniente. Para $j \leq r$, calculamos

$$\langle q_{r+1} , q_j \rangle = \langle v_{r+1} , q_j \rangle - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle q_i , q_j \rangle = \langle v_{r+1} , q_j \rangle - \alpha_j \langle q_j , q_j \rangle \,,$$

pois $\langle q_i , q_j \rangle = 0$ para $i \neq j$.

Se $q_j \neq 0_V$, construímos q_{r+1} ortogonal a q_j escolhendo

$$\alpha_j = \frac{\langle v_{r+1} , q_j \rangle}{\langle q_j , q_j \rangle} \,.$$

Caso $q_j = 0_V$, temos que q_{r+1} é ortogonal a q_j para qualquer escolha de α_j. Assim, escolhemos $\alpha_j = 0$. Desse modo, o elemento q_{r+1} fica bem definido e é ortogonal aos elementos $q_1 , \cdots , q_r$. Portanto, o elemento q_{r+1} é ortogonal a todo elemento do subespaço $[q_1 , \cdots , q_r]$. Portanto, provamos a propriedade *(a)* quando $k = r + 1$.

Para provar a propriedade *(b)*, para $k = r + 1$, devemos mostrar que

$$S_{r+1} = [v_1, \cdots, v_{r+1}] = W_{r+1} = [q_1, \cdots, q_{r+1}]$$

tomando por hipótese que

$$S_r = [v_1, \cdots, v_r] = W_r = [q_1, \cdots, q_r].$$

Os elementos $q_1, \cdots, q_r$ pertencem ao subespaço S_r e também ao subespaço S_{r+1}.

Sabemos que o novo elemento q_{r+1} é escrito da seguinte forma:

$$q_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i .$$

Assim, o elemento q_{r+1} é escrito como a diferença de dois elementos que pertencem ao subespaço S_{r+1}. Desse modo, o elemento $q_{r+1} \in S_{r+1}$. Logo, provamos que

$$[q_1, \cdots, q_{r+1}] \subseteq [v_1, \cdots, v_{r+1}].$$

De modo análogo, temos que o elemento v_{r+1} é escrito como:

$$v_{r+1} = q_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i .$$

Assim, o elemento v_{r+1} é escrito como a soma de dois elementos que pertencem ao subespaço W_{r+1}. Desse modo, o elemento $v_{r+1} \in W_{r+1}$. Logo, provamos que

$$[v_1, \cdots, v_{r+1}] \subseteq [q_1, \cdots, q_{r+1}].$$

Portanto, provamos a propriedade *(b)* quanto $k = r + 1$.

Finalmente, vamos provar a propriedade *(c)* por um processo de indução sobre k. Para $k = 1$, o resultado segue trivialmente. Vamos assumir que a propriedade *(c)* é válida para $k = r$ e considerar o elemento q'_{r+1}. Pela propriedade *(b)*, temos que o elemento $q'_{r+1} \in W_{r+1}$. Assim, podemos escrever

$$q'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i q_i = w_r + c_{r+1} q_{r+1},$$

onde o elemento $w_r \in W_r$. Agora, basta provar que $w_r = 0_V$. Pela propriedade *(a)*, sabemos que os elementos q'_{r+1} e $c_{r+1} q_{r+1}$ são ortogonais ao elemento w_r. Desse modo, obtemos

$$\langle q'_{r+1}, w_r \rangle = \langle w_r, w_r \rangle + \langle c_{r+1} q_{r+1}, w_r \rangle \implies \langle w_r, w_r \rangle = 0.$$

Logo, $w_r = 0_V$, o que completa a demonstração do **processo de ortogonalização**. ■

Do processo de ortogonalização, sabemos que o elemento q_{r+1} é escrito da forma:

$$q_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, q_i \, .$$

Desse modo, considerando que $q_{r+1} = 0_V$ para algum r, obtemos que o elemento v_{r+1} é uma combinação linear dos elementos $q_1 , \cdots , q_r$, e também dos elementos $v_1 , \cdots , v_r$. Logo, os elementos $v_1 , \cdots , v_r , v_{r+1}$ são linearmente dependentes em V.

Portanto, se os elementos $v_1 , \cdots , v_k$ são linearmente independentes, então os elementos $q_1 , \cdots , q_k$ são não–nulos. Assim, o **processo de ortogonalização de Gram–Schmidt** pode ser descrito da seguinte forma:

$$q_1 = v_1 \qquad \text{e} \qquad q_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1} , q_i \rangle}{\langle q_i , q_i \rangle} q_i$$

para $r = 1, \cdots , k-1$.

Exemplo 5.7.1 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$ *munido do produto interno usual e* $\gamma = \{ (2,1), \; (1,1) \}$ *uma base ordenada do* $I\!R^2$. *Obter a partir de* γ *uma base ordenada ortogonal para* $I\!R^2$ *com relação ao produto interno usual.*

Vamos utilizar o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. Inicialmente, escolhemos

$$q_1 = v_1 = (2,1) \, .$$

Em seguida, construímos o elemento q_2 da seguinte forma:

$$q_2 = v_2 - \alpha_{12} \, q_1 \, ,$$

ortogonal ao subespaço $W_1 = [q_1]$. Assim, temos que

$$\alpha_{12} = \frac{\langle v_2 , q_1 \rangle}{\langle q_1 , q_1 \rangle} = \frac{3}{5} \, ,$$

obtendo

$$q_2 = (1,1) - \frac{3}{5}(2,1) = \left(-\frac{1}{5} , \frac{2}{5} \right) .$$

Assim, fazendo uso da propriedade *(c)* do Teorema 5.7.1, obtemos

$$\beta = \left\{ (2,1) \, , \left(-\frac{1}{5} , \frac{2}{5} \right) \right\} \qquad \text{ou} \qquad \beta = \{ (2,1) \, , (-1,2) \}$$

uma base ortogonal para $I\!R^2$.

Teorema 5.7.2 *Todo espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno possui uma base ortonormal.*

Demonstração – Sejam V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base ordenada para V. A partir da base ordenada β, vamos obter uma base ortogonal, através do processo de ortogonalização de Gram–Schmidt.

Em primeiro lugar, seja $q_1 = v_1$. Note que o subespaço $S_1 = [v_1]$ é igual ao subespaço $W_1 = [q_1]$. Agora vamos construir um vetor q_2 que seja ortogonal ao subespaço W_1 e que o subespaço $S_2 = [v_1 , v_2]$ seja igual ao subespaço $W_2 = [q_1 , q_2]$. Então,

$$q_2 = v_2 - \alpha_{12} q_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_{12} = \frac{\langle v_2 , q_1 \rangle}{\| q_1 \|_2^2}$$

Como v_1 e v_2 são linearmente independentes, temos que $q_2 \neq 0_V$.

Agora vamos construir um vetor q_3 que seja ortogonal ao subespaço W_2 e que o subespaço $S_3 = [v_1 , v_2 , v_3]$ seja igual ao subespaço $W_3 = [q_1 , q_2 , q_3]$. Então,

$$q_3 = v_3 - \alpha_{13} q_1 - \alpha_{23} q_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{13} = \frac{\langle v_3 , q_1 \rangle}{\| q_1 \|_2^2} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{23} = \frac{\langle v_3 , q_2 \rangle}{\| q_2 \|_2^2}$$

Como v_1 , v_2 , v_3 são linearmente independente, temos que $q_3 \neq 0_V$.

Repetindo o processo para $j = 2, \cdots n$, temos que

$$q_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij} q_i \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{ij} = \frac{\langle v_j , q_i \rangle}{\| q_i \|_2^2} \qquad \text{para} \qquad i = 1, \cdots , j-1 \,.$$

Como $v_1 , \cdots , v_j$ são linearmente independentes, temos que $q_j \neq 0_V$. Além disso, temos que o subespaço $S_j = [v_1 , \cdots , v_j]$ é igual ao subespaço $W_j = [q_1 , \cdots , q_j]$.

Assim, obtemos uma base ortogonal $\{ q_1 , \cdots , q_n \}$. Finalmente, fazendo

$$q_j^* = \frac{q_j}{\| q_j \|_2} \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots , n$$

obtemos uma base ortonormal $\beta^* = \{ q_1^* , \cdots , q_n^* \}$, o que completa a prova. ∎

Exemplo 5.7.2 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$ *munido do produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx\,.$$

Obter a partir da base $\beta = \{\, 1,\, x,\, x^2,\, x^3 \,\}$ *uma base ortogonal* $\gamma = \{\, P_0, \cdots, P_3 \,\}$*.*

Utilizando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt, obtemos

$$P_0(x) \;=\; 1 \quad , \quad P_1(x) \;=\; x \quad , \quad P_2(x) \;=\; x^2 \,-\, \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad P_3(x) \;=\; x^3 \,-\, \frac{3}{5}x\,.$$

Os polinômios $P_0, \cdots, P_3$ são denominados **polinômios ortogonais de Legendre**. Esta denominação é em homenagem ao matemático Frances A. M. Legendre (1752–1833) que encontrou tais polinômios em seus estudos sobre a Teoria do Potencial.

Exemplo 5.7.3 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{P}_3(I\!\!R)$ *munido do produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{0}^{\infty} \exp(-x)p(x)q(x)dx\,.$$

Obter a partir da base $\beta = \{\, 1,\, x,\, x^2,\, x^3 \,\}$ *uma base ortogonal* $\gamma = \{\, L_0, \cdots, L_3 \,\}$*.*

Utilizando o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt, obtemos os polinômios

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= x - 1 \\ L_2(x) &= x^2 - 4x + 2 \\ L_3(x) &= x^3 - 9x^2 + 18x - 6 \end{aligned}$$

que são denominados **polinômios ortogonais de Laguerre**.

Na construção dos polinômios de Laguerre utilizamos o seguinte resultado

$$\int_0^{\infty} \exp(-x)\, x^n dx \;=\; n! \qquad \text{para} \qquad n \,\in\, I\!\!N\,,$$

que é facilmente obtido através do processo de indução sobre n, juntamente com a técnica de integração por partes.

Exemplo 5.7.4 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *munido do produto interno usual e* $\beta = \{ v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,2,1), v_3 = (0,0,1) \}$ *uma base do* $I\!R^3$*. Obter a partir de* β *uma base ortogonal* $\beta^* = \{ q_1, q_2, q_3 \}$ *para o* $I\!R^3$ *com relação ao produto interno usual.*

Vamos utilizar o processo de ortogonalização de Gram–Schmidt. Inicialmente, escolhemos

$$q_1 = v_1 = (1,1,1).$$

Em seguida, construímos q_2 da seguinte forma:

$$q_2 = v_2 - \alpha_{12}\, q_1 ,$$

ortogonal ao subespaço $W_1 = [q_1]$. Assim, temos que

$$\alpha_{12} = \frac{\langle v_2 , q_1 \rangle}{\langle q_1 , q_1 \rangle} = \frac{3}{3} = 1$$

obtendo $q_2 = (-1,1,0)$.

Finalmente, construímos q_3 da seguinte forma:

$$q_3 = v_3 - \alpha_{13}\, q_1 - \alpha_{23}\, q_2 ,$$

ortogonal ao subespaço $W_2 = [q_1, q_2]$. Assim, temos que

$$\alpha_{13} = \frac{\langle v_3 , q_1 \rangle}{\langle q_1 , q_1 \rangle} = \frac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{23} = \frac{\langle v_3 , q_2 \rangle}{\langle q_2 , q_2 \rangle} = 0 ,$$

obtendo $q_3 = \frac{1}{3}(-1,-1,2)$, ou $q_3' = (-1,-1,2)$.

Portanto, temos a seguinte base ortogonal para o $I\!R^3$

$$\beta^* = \{ (1,1,1), (-1,1,0), (-1,-1,2) \}$$

de acordo com o Teorema 5.7.1.

Exercícios

Exercício 5.32 *Considere o conjunto* Γ *formado pelos seguintes elementos de* $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1, 1, 1), \qquad u_2 = (1, 2, -3) \qquad e \qquad u_3 = (5, -4, -1).$$

(a) Mostre que Γ *é uma base ortogonal para o* $\mathbb{R}^3$.

(b) Encontre as coordenadas do elemento $v = (1, 5, -7)$ *com relação à base* Γ.

Exercício 5.33 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto interno usual. Determine uma base ortogonal para o subespaço* S *de* $\mathbb{R}^4$ *gerado pelos elementos*

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \qquad v_2 = (1, 1, 2, 4) \qquad e \qquad v_3 = (1, 2, -4, -3).$$

Exercício 5.34 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ *com o produto interno usual e o subespaço vetorial* $U = \{ f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]) \ / \ f(-x) = f(x) \}$. *Seja*

$$\gamma = \{ 1, \cos(x), \cos(2x), \cdots, \cos(nx) \}$$

um conjunto ortogonal em U. *Calcular os coeficientes de Fourier da função* $f(x) = |x|$, *para* $x \in [-\pi, \pi]$, *com relação ao conjunto ortogonal* γ.

Exercício 5.35 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com o produto interno*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

Aplique o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt na base canônica $\{ 1, t, t^2 \}$ *para obter uma base ortonormal* $\{ P_0, P_1, P_2 \}$.

Resposta: $\boxed{P_0(t) = 1 \quad , \quad P_1(t) = \sqrt{3}(2t - 1) \quad \text{e} \quad P_2(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)}$

Exercício 5.36 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *com o produto interno*

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall \ p, q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}).$$

Seja $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *a transformação linear definida por:* $T(p)(x) = p(1)$. *Determine um elemento* $q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *tal que* $T(p) = \langle p, q \rangle$ *para* $p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

Exercício 5.37 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *munido do produto interno usual. Determine uma base ortogonal para o subespaço* W *definido por:*

$$W = \{ A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ A \ \text{é triangular inferior} \}$$

a partir da base $\beta = \{ A_1, A_2, A_3 \}$ *formada pelos elementos*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Exercício 5.38 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto interno usual. Seja* $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *a transformação linear definida por:*

$$T(x,y,z,t) = (x - y - z + t, -x + z + t) .$$

Determine uma base ortogonal para o subespaço $Ker(T)$*.*

Exercício 5.39 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno usual. Determine uma base ortogonal para o subespaço* W *definido por:*

$$W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0 \} .$$

5.8 Complemento Ortogonal

Definição 5.8.1 *Sejam V um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e S um conjunto não vazio de elementos de V. O conjunto $S^{\perp}$ definido por:*

$$S^{\perp} = \{ u \in V \ / \ \langle u , v \rangle = 0 \quad \textit{para todo} \quad v \in S \} ,$$

é denominado "S perpendicular". No caso em que S é um subespaço vetorial de V, o conjunto $S^{\perp}$ é denominado ***complemento ortogonal*** *de S em V.*

Teorema 5.8.1 *O conjunto $S^{\perp}$ é um subespaço de V, mesmo que S não o seja. Além disso, tem–se que $S \cap S^{\perp} = \{ 0_V \}$ no caso em que S é um subespaço de V.*

Demonstração – Temos que $S^{\perp} \neq \emptyset$, pois $\langle 0_V , v \rangle = 0$ para todo $v \in S$. Desse modo, temos que $O_V \in S^{\perp}$. Agora, basta mostrar que $S^{\perp}$ satisfaz as condições do Teorema 3.2.1. Sejam $w_1, w_2 \in S^{\perp}$ e $v \in S$. Então, tem–se que

$$\langle w_1 , v \rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle w_2 , v \rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle w_1 + w_2 , v \rangle = 0 .$$

Logo, $w_1 + w_2 \in S^{\perp}$. De modo análogo, temos que $\lambda w_1 \in S^{\perp}$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.

Considerando agora S um subespaço de V, vamos mostrar que $S \cap S^{\perp} = \{ 0_V \}$. Tomando $w \in S^{\perp} \cap S$, isto é, $w \in S^{\perp}$ e $w \in S$. Como $w \in S^{\perp}$, temos que $\langle w , v \rangle = 0$ para todo $v \in S$. Em particular para $v = w$, pois $w \in S$, obtemos $\langle w , w \rangle = 0$. Logo, $w = 0_V$, o que completa a demonstração. ■

Teorema 5.8.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, U e W subespaços vetoriais de V. Então, $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.*

Demonstração – Inicialmente, tomamos $v \in (U + W)^{\perp}$, isto é, v é ortogonal a todo elemento $u + w$ pertencente ao subespaço $U + W$. Como $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$, temos que v é ortogonal a todo elemento de U e a todo elemento de W, isto é, $v \in U^{\perp}$ e $v \in W^{\perp}$. Logo, $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Assim, mostramos que $(U + W)^{\perp} \subset U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Finalmente, seja $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$, isto é, v é ortogonal a todo elemento de U e a todo elemento de W. Desse modo, dado um elemento $u + w \in U + W$, temos que

$$\langle v , u + w \rangle = \langle v , u \rangle + \langle v , w \rangle = 0 .$$

Logo, $v \in (U + W)^{\perp}$. Assim, mostramos que $U^{\perp} \cap W^{\perp} \subset (U + W)^{\perp}$. Portanto, provamos que $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$. ■

Proposição 5.8.1 *Sejam* V *um espaço vetorial munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, W *um subespaço de* V *e* $\beta = \{ w_1 , \cdots , w_n \}$ *uma base para* W. *Então,* $v \in W^{\perp}$ *se, e somente se,* $\langle w_i , v \rangle = 0$ *para todo* $i = 1, \cdots , n$.

Demonstração

($\Longrightarrow$) Se $v \in W^{\perp}$, isto é, $\langle w , v \rangle = 0$ para todo $w \in W$. Em particular, temos que $\langle w_i , v \rangle = 0$ para todo $i = 1, \cdots , n$.

($\Longleftarrow$) Seja $w \in W$, isto é, w é escrito de modo único como:

$$w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n .$$

Desse modo, para todo $v \in V$, temos que

$$\langle w , v \rangle = \alpha_1 \langle w_1 , v \rangle + \cdots + \alpha_n \langle w_n , v \rangle .$$

Considerando $\langle w_i , v \rangle = 0$, para $1 \leq i \leq n$, temos que $\langle w , v \rangle = 0$. Logo, $v \in W^{\perp}$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 5.8.1 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^4$ *munido do produto interno usual. Seja* W *o subespaço de* $I\!R^4$ *dado por:* $W = [(1,0,1,1),(1,1,0,1)]$. *Determine uma base para o subespaço* $W^{\perp}$.

Temos que todo elemento $(x,y,z,t) \in W^{\perp}$ deve ser ortogonal aos elementos geradores de W. Assim, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + y + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Obtemos $x = -z - t$ e $y = z$ para $z, t \in I\!R$. Desse modo, todo elemento $(x,y,z,t) \in W^{\perp}$ é escrito da seguinte forma:

$$(x,y,z,t) = \alpha_1(-1,1,1,0) + \alpha_2(-1,0,0,1) \quad \text{para} \quad \alpha_1, \alpha_2 \in I\!R .$$

Portanto, temos que $W^{\perp} = [(-1,1,1,0), (-1,0,0,1)]$.

Exemplo 5.8.2 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^2$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Determine* $U^\perp$ *do seguinte subespaço*

$$U = \{ (x,y) \in I\!R^2 \ / \ y - 2x = 0 \}.$$

Note que U é uma reta no plano passando pelo origem e que tem por vetor diretor $u = (1,2)$. Assim, todo elemento $v = (x,y) \in U^\perp$ satisfaz

$$\langle v , u \rangle = 0 \implies x + 2y = 0.$$

Portanto, todo elemento $(x,y) \in U^\perp$ satisfaz a equação da reta $y = -\dfrac{x}{2}$.

Exemplo 5.8.3 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^3$ *com o produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Seja* W *o subespaço gerado pelo elemento* $w = (1,-1,2) \in I\!R^3$. *Determine* $W^\perp$.

Tomando $v = (x,y,z) \in W^\perp$ e como W é gerado pelo elemento w, temos que

$$\langle v , w \rangle = 0 \implies x - y + 2z = 0.$$

Portanto, todo elemento $(x,y,z) \in W^\perp$ satisfaz a equação do plano $x - y + 2z = 0$.

Exemplo 5.8.4 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ *com o produto interno usual*

$$\langle f , g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad ; \qquad \forall \ f,g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi]).$$

Considere o subespaço vetorial das funções pares

$$S = \{ f \in \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \ / \ f(-x) = f(x) \ , \ x \in [-\pi,\pi] \}.$$

Mostre que o complemento ortogonal de S *em* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ *é o subespaço vetorial das funções ímpares, isto é,*

$$S^\perp = \{ g \in \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \ / \ g(-x) = -g(x) \ , \ x \in [-\pi,\pi] \}.$$

Exemplo 5.8.5 *Considere o espaço vetorial real* $I\!M_n(I\!R)$ *com o produto interno usual*

$$\langle A , B \rangle = tr(B^t A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \qquad ; \qquad \forall \ A, \ B \in I\!M_n(I\!R).$$

Considere o subespaço vetorial das matrizes diagonais

$$S = \{ D \in I\!M_n(I\!R) \ / \ D \ \text{é uma matriz diagonal} \}.$$

Determine o complemento ortogonal de S *em* $I\!M_n(I\!R)$.

Exemplo 5.8.6 *Considere o espaço vetorial real*

$$U = \{ \, p(x) \in \mathcal{P}_3(I\!\!R) \; / \; p(-1) = p(1) = 0 \, \}$$

com o produto interno

$$\langle \, p \, , \, q \, \rangle = \int_{-1}^{1} p'(x)q'(x)dx \qquad ; \qquad \forall \; p, q \in U \, .$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [1 - x^2]$ *em* U *com relação ao produto interno* $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ *definido acima.*

Como $dim(U) = 2$ e $dim(S) = 1$, podemos concluir que $dim(S^{\perp}) = 1$.

Chamando $p(x) = 1 - x^2$, temos que o subespaço $S = [p(x)]$. O subespaço $S^{\perp}$ é definido por:

$$S^{\perp} = \{ \, q(x) \in \mathcal{P}_3(I\!\!R) \; / \; \langle \, r \, , \, q \, \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \; r(x) \in S \, \} \, .$$

Tomando um elemento genérico $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in S^{\perp}$, sabemos que $\langle \, p \, , \, q \, \rangle = 0$. Além disso, $q(-1) = q(1) = 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \langle \, p \, , \, q \, \rangle &= \int_{-1}^{1} (\, -2x \,)(\, b + 2cx + 3dx^2 \,)dx = \int_{-1}^{1} (\, -2bx - 4cx^2 - 6dx^3 \,)dx \\ &= -4c\int_{-1}^{1} x^2 dx = -\frac{8}{3}c = 0 \end{aligned}$$

Assim, obtemos $c = 0$. Logo, $q(x) = a + bx + dx^3$, que impondo as condições

$$q(-1) = a - b - d = 0 \qquad \text{e} \qquad q(1) = a + b + d = 0 \, ,$$

temos um sistema linear homogêneo cuja solução é $a = 0$ e $d = -b$ para $b \in I\!\!R$.

Desse modo, todo elemento $q(x) \in S^{\perp}$ é escrito da seguinte forma:

$$q(x) = b(\, x - x^3 \,) \qquad ; \qquad b \in I\!\!R \, .$$

Portanto, uma base para o subespaço $S^{\perp}$ é dada pelo conjunto

$$\gamma = \{ \, x - x^3 \, \} \, .$$

Exemplo 5.8.7 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *munido do produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} x^2 p(x) q(x) dx \qquad ; \qquad \forall\; p,\, q \,\in\, \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [1 + x]$ *em* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com relação ao produto interno* $\langle \cdot \,, \cdot \rangle$ *definido acima.*

Chamando $p(x) \,=\, 1 \,+\, x$, temos que o subespaço $S \,=\, [p(x)] \,\subset\, \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

O subespaço $S^{\perp}$ é definido por:

$$S^{\perp} \;=\; \{\; q \,\in\, \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \;\;/\;\; \langle\, r \,,\, q \,\rangle \,=\, 0 \quad ; \quad \forall\, r \,\in\, S \,\}\,.$$

Tomando um elemento genérico $q(x) \,=\, a \,+\, bx \,+\, cx^2 \,\in\, S^{\perp}$, sabemos que $\langle\, p \,,\, q \,\rangle \,=\, 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;&=\; \int_{-1}^{1} x^2(1 \,+\, x)(a \,+\, bx \,+\, cx^2)dx \\
&=\; \int_{-1}^{1} (x^2 \,+\, x^3)(a \,+\, bx \,+\, cx^2)dx \\
&=\; \int_{-1}^{1} (\, ax^2 \,+\, bx^3 \,+\, cx^4 \,+\, ax^3 \,+\, bx^4 \,+\, cx^5\,)dx \;=\; 0 \\
&=\; \int_{-1}^{1} (\, ax^2 \,+\, cx^4 \,+\, bx^4\,)dx \;=\; 0
\end{aligned}$$

Calculando a integral, resulta a seguinte equação

$$\frac{2}{3}a \,+\, \frac{2}{5}c \,+\, \frac{2}{5}b \;=\; 0$$

Resolvendo a equação acima para a incógnita c, temos que

$$c \;=\; -\frac{5}{3}a \,-\, b\,.$$

Portanto, todo elemento $q(x) \,\in\, S^{\perp}$ é escrito como:

$$\begin{aligned}
q(x) \;&=\; a \,+\, bx \,+\, \left(-\frac{5}{3}a \,-\, b\right)x^2 \\
&=\; \left(1 \,-\, \frac{5}{3}x^2\right)a \;+\; (\,x \,-\, x^2\,)\,b \qquad \text{para} \qquad a,\, b \,\in\, \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Desse modo, uma base para o subespaço $S^{\perp}$ é formada pelos elementos

$$q_1(x) \;=\; 1 \,-\, \frac{5}{3}x^2 \qquad \text{e} \qquad q_2(x) \;=\; x \,-\, x^2\,.$$

5.9 Decomposição Ortogonal

Teorema 5.9.1 *Sejam* V *um espaço vetorial munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* S *um subespaço de dimensão finita de* V. *Então,* $V = S \oplus S^{\perp}$*, isto é, todo elemento* $u \in V$ *pode ser escrito de modo único da seguinte forma:*

$$u = v + w \qquad com \qquad v \in S \quad e \quad w \in S^{\perp} .$$

Além disso, a norma do elemento u *é dada pela* ***Fórmula de Pitágoras***

$$\| u \|_2^2 = \| v \|_2^2 + \| w \|_2^2 .$$

Demonstração – Seja $\beta = \{ q_1, \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal para o subespaço S. Desse modo, todo elemento $v \in S$ pode ser escrito de modo único da seguinte forma:

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j \, q_j \, ,$$

onde c_j são os coeficiente de Fourier de v em relação à base ortonormal β.

Dado um elemento $u \in V$ vamos escreve–lo da seguinte forma:

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j + w \qquad \Longrightarrow \qquad w = u - \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j$$

para em seguida mostrar que o elemento $w \in S^{\perp}$. De fato, fazendo o produto interno entre o elemento w e os elementos da base β, obtemos

$$\langle w , q_i \rangle = \langle u , q_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \langle q_j , q_i \rangle = 0 \qquad , \qquad i = 1, \cdots , n$$

Como $\langle w , q_i \rangle = 0$ para $i = 1, \cdots , n$, temos que $w \in S^{\perp}$. Portanto, obtemos que $u = v + w$ com $v \in S$ e $w \in S^{\perp}$.

Finalmente, vamos mostrar a unicidade dos elementos $v \in S$ e $w \in S^{\perp}$. Para isso, vamos supor que

$$u = v_1 + w_1 \qquad \text{com} \qquad v_1 \in S \quad \text{e} \quad w_1 \in S^{\perp}$$

$$u = v_2 + w_2 \qquad \text{com} \qquad v_2 \in S \quad \text{e} \quad w_2 \in S^{\perp} .$$

Desse modo, temos que

$$0_V = (v_1 - v_2) + (w_1 - w_2) \qquad \Longrightarrow \qquad (v_1 - v_2) = (w_2 - w_1) .$$

Assim, podemos concluir que $(v_1 - v_2) \in S \cap S^{\perp}$ e que $(w_2 - w_1) \in S \cap S^{\perp}$. Como $S \cap S^{\perp} = \{ 0_V \}$, temos que $v_1 - v_2 = 0_V$ e $w_2 - w_1 = 0_V$. Portanto, segue a unicidade dos elementos v e w.

Como $u \in V$ é escrito como $u = v + w$ com $v \in S$ e $w \in S^{\perp}$, obtemos

$$\begin{aligned} \| u \|_2^2 &= \langle v + w , v + w \rangle = \langle v , v \rangle + \langle v , w \rangle + \langle w , v \rangle + \langle w , w \rangle \\ &= \| v \|_2^2 + \| w \|_2^2 , \end{aligned}$$

que é a **Fórmula de Pitágoras**, completando a demonstração. ■

Corolário 5.9.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e S um subespaço de V. Então, $dim(V) = dim(S) + dim(S^{\perp})$.*

Demonstração – Combinando os resultados do Teorema 3.6.5, sobre a dimensão da soma de dois subespaços, e do Teorema 5.9.1, obtemos o resultado desejado. □

Teorema 5.9.2 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e U um subespaço vetorial de V. Então $U = (U^{\perp})^{\perp}$.*

Demonstração – Tomando um elemento $u \in U$, temos que $\langle u , v \rangle = 0$ para todo $v \in U^{\perp}$. Logo, $u \in (U^{\perp})^{\perp}$. Assim, mostramos que $U \subset (U^{\perp})^{\perp}$.

Finalmente, tomando $w \in (U^{\perp})^{\perp}$, isto é, $\langle w , v \rangle = 0$ para todo $v \in U^{\perp}$.

Pelo Teorema 5.9.1, sabemos que $V = U \oplus U^{\perp}$. Desse modo, podemos escrever o elemento $w \in (U^{\perp})^{\perp}$ da seguinte forma:

$$w = u + v$$

com $u \in U$ e $v \in U^{\perp}$. Assim, temos que

$$\langle w , v \rangle = \langle u , v \rangle + \langle v , v \rangle = 0 .$$

Como $\langle u , v \rangle = 0$, obtemos $\langle v , v \rangle = 0$. Logo, temos que $v = 0_V$.

Desse modo, concluímos que $w \in U$. Assim, mostramos que $(U^{\perp})^{\perp} \subset U$. Portanto, provamos que $U = (U^{\perp})^{\perp}$, completando a demonstração. ■

Teorema 5.9.3 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, U e W subespaços vetoriais de V. Então, $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.*

Demonstração – Inicialmente, tomamos $v \in U^\perp + W^\perp$. Assim, podemos escrever o elemento v da seguinte forma $v = \overline{u} + \overline{w}$, com $\overline{u} \in U^\perp$ e $\overline{w} \in W^\perp$.

Desse modo, dado um elemento $\widehat{v} \in U \cap W$, temos que

$$\langle v , \widehat{v} \rangle = \langle \overline{u} + \overline{w} , \widehat{v} \rangle = \langle \overline{u} , \widehat{v} \rangle + \langle \overline{w} , \widehat{v} \rangle = 0 ,$$

pois $\widehat{v} \in U$ e $\widehat{v} \in W$. Logo, tem–se $v \in (U \cap W)^\perp$.

Assim, mostramos que $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$.

Finalmente, tomamos $v \in (U \cap W)^\perp$, isto é, $\langle v , w \rangle = 0$ para todo $w \in U \cap W$.

Pelo Teorema 5.9.1, sabemos que

$$V = (U^\perp + W^\perp) \oplus (U^\perp + W^\perp)^\perp$$

Utilizando o resultado do Teorema 5.8.2 e o resultado do Teorema 5.9.2, obtemos

$$(U^\perp + W^\perp)^\perp = (U \cap W) .$$

Assim, temos que

$$V = (U^\perp + W^\perp) \oplus (U \cap W)$$

Desse modo, podemos escrever o elemento $v \in (U \cap W)^\perp$ da seguinte forma:

$$v = v_1 + w \quad \text{com} \quad v_1 \in (U^\perp + W^\perp) \quad \text{e} \quad w \in (U \cap W) .$$

Assim sendo, temos que

$$\langle v , w \rangle = \langle v_1 , w \rangle + \langle w , w \rangle = 0 .$$

Como $\langle v_1 , w \rangle = 0$, obtemos $\langle w , w \rangle = 0$. Logo, temos que $w = 0_V$.

Desse modo, concluímos que $v \in (U^\perp + W^\perp)$.

Assim, temos que $(U \cap W)^\perp \subset U^\perp + W^\perp$.

Portanto, provamos que $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$, o que completa a demonstração. ■

Exemplo 5.9.1 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^2$ *com o produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Seja* S *o subespaço de* $I\!R^2$ *definido por:* $S = \{ (x, y) \in I\!R^2 \ / \ x - y = 0 \}$. *Dado o elemento* $u = (-1, 3) \in I\!R^2$, *determine sua decomposição* $u = v + w$ *com* $v \in S$ *e* $w \in S^{\perp}$.

Sabemos que $\left\{ q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1) \right\}$ é uma base para o subespaço S. Assim, temos que o elemento $v \in S$ e o elemento $w \in S^{\perp}$ são dados por:

$$v = \langle u , q \rangle q = (1,1) \qquad \text{e} \qquad w = u - v = (-2, 2) .$$

de acordo com o Teorema 5.9.1.

Exemplo 5.9.2 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^4$ *munido do produto interno usual e* W *o subespaço definido por:*

$$W = \{ (x, y, z, t) \in I\!R^4 \ / \ x - 2y + z - 3t = 0 \} ,$$

isto é, W *é um hiperplano em* $I\!R^4$. *Temos que,* $dim(W) = 3$.

Podemos verificar facilmente que $W^{\perp} = [(1, -2, 1, -3)]$. Assim, utilizando o resultado do Corolário 5.9.1 com $V = I\!R^4$, obtemos

$$dim(W) = 4 - dim(W^{\perp}) = 3 .$$

De um modo geral, um **hiperplano** H contido no espaço vetorial $I\!R^n$ é definido como:

$$H = \{ (x_1, \cdots , x_n) \in I\!R^n \ / \ c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0 \} ,$$

conhecendo os escalares $c_1, \cdots , c_n$.

Note que considerando o elemento $v = (c_1, \cdots , c_n) \in I\!R^n$, fixo, temos que

$$H = \{ u \in I\!R^n \ / \ \langle u , v \rangle = 0 \} ,$$

Desse modo, o subespaço $H^{\perp} = [v]$. Logo, pelo Corolário 5.9.1, obtemos que $dim(H)$ é igual a $(n - 1)$.

Exemplo 5.9.3 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto interno usual e* W *o subespaço definido por:*

$$W = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x - 2y + z + t = 0 \}.$$

Determine uma base para o subespaço W *e uma base para o subespaço* $W^{\perp}$.

Temos que todo elemento $w \in W$ é escrito como

$$w = \alpha_1(2,1,0,0) + \alpha_2(-1,0,1,0) + \alpha_3(-1,0,0,1) \qquad \text{para} \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Portanto, os elementos $v_1 = (2,1,0,0)$, $v_2 = (-1,0,1,0)$ e $v_3 = (-1,0,0,1)$ formam uma base para o subespaço W.

Temos que todo elemento $u = (x,y,z,t) \in W^{\perp}$ é ortogonal aos elementos de W. Assim, $u \in W^{\perp}$ deve ser ortogonal aos elementos da base de W, isto é,

$$\begin{array}{l} \langle u \,, v_1 \rangle = 0 \\ \langle u \,, v_2 \rangle = 0 \\ \langle u \,, v_3 \rangle = 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + t = 0 \end{cases}$$

A solução do sistema linear homogêneo é dada por:

$$x = t \quad , \quad y = -2t \quad \text{e} \quad z = t \qquad \text{para} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Desse modo, todo elemento $u = (x,y,z,t) \in W^{\perp}$ é escrito da forma:

$$u = (x,y,z,t) = t\,(1,-2,1,1) \qquad \text{para} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o subespaço $W^{\perp} = [(1,-2,1,1)]$.

Exemplo 5.9.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!R)$ *munido do produto interno*

$$\langle\, p\,,\, q\,\rangle \;=\; \int_0^1 p(x)q(x)dx\,.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $W = [1, x]$.

Por simplicidade, vamos chamar de $p_1(x) = 1$ e $p_2(x) = x$ os elementos da base do subespaço W. Assim, todo elemento $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W^{\perp}$ deve ser ortogonal aos elementos da base de W, isto é,

$$\begin{array}{rcl} \langle\, q\,,\, p_1\,\rangle & = & 0 \\[2ex] \langle\, q\,,\, p_2\,\rangle & = & 0 \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & \dfrac{1}{2}b & + & \dfrac{1}{3}c & + & \dfrac{1}{4}d & = & 0 \\[3ex] \dfrac{1}{2}a & + & \dfrac{1}{3}b & + & \dfrac{1}{4}c & + & \dfrac{1}{5}d & = & 0 \end{array} \right.$$

A solução do sistema linear homogêneo é dada por:

$$\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{1}{6}c + \dfrac{1}{5}d \\[3ex] b & = & -c - \dfrac{9}{10}d \end{array}$$

para $c, d \in I\!R$.

Portanto, todo elemento $q(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W^{\perp}$ é escrito da seguinte forma:

$$q(x) \;=\; \left(\frac{1}{6} - x + x^2 \right) c \;+\; \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{10}x + x^3 \right) d$$

para $c, d \in I\!R$. Portanto, os elementos

$$q_1(x) \;=\; \frac{1}{6} - x + x^2 \qquad \text{e} \qquad q_2(x) \;=\; \frac{1}{5} - \frac{9}{10}x + x^3$$

formam uma base para o subespaço $W^{\perp}$.

Exercícios

Exercício 5.40 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([1,e])$ *munido do produto interno*

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle \;=\; \int_1^e \ln(t) f(t) g(t) dt \,.$$

Determine as funções $g(x) = a + bx$, $a, b \in I\!R$, *que são ortogonais à função* $f(x) = 1$. *Dê uma interpretação geométrica.*

Resposta: $\boxed{\; g(x) \;=\; b\left(x \;-\; \dfrac{e^2 \;+\; 1}{4} \right) \,,\;\; b \;\in\; I\!R \;}$

Exercício 5.41 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^3$ *com o produto interno usual. Seja* $T : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ *a transformação linear definida por:*

$$T(x,y,z) \;=\; (x - y - z,\, 2z - x)\,.$$

Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal do subespaço $Ker(T)$.

Exercício 5.42 *Considere o espaço vetorial real*

$$U \;=\; \{\; p(x) \;\in\; \mathcal{P}_3(I\!R) \;\;/\;\; p(1) \;=\; 0 \;\}$$

com o produto interno

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p'(x) q'(x) dx \qquad ; \qquad \forall\;\; p,\, q \;\in\; U\,.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [\,1 \,-\, x\,]$ *em* U *com relação ao produto interno* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *definido acima.*

Exercício 5.43 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *munido do produto interno usual. Dados os elementos* $u = (1,1,1)$ *e* $v = (2,-1,1)$. *Determine os elementos* w_1 *e* w_2 *tais que* $v = w_1 + w_2$, *de modo que* w_1 *seja ortogonal ao elemento* u *e que o conjunto* $\{\, w_2 \,,\, u \,\}$ *seja linearmente dependente. Dê uma interpretação geométrica.*

Exercício 5.44 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!R)$ *com o produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx \qquad ; \qquad \forall\;\; p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_3(I\!R)\,,$$

e o subespaço vetorial $S \;=\; \{\; p(x) \;\in\; \mathcal{P}_3(I\!R) \;\;/\;\; p(-1) \;=\; p(1) \;=\; 0 \;\}$. *Dado o polinômio* $q(x) = 1 + 2x - x^2$, *determine sua decomposição* $q(x) = p(x) + r(x)$ *com* $p(x) \in S$ *e* $r(x) \in S^{\perp}$.

Exercício 5.45 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *com o produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall\; p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_2(I\!R)\,.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $S = [1 \,+\, x,\, 1 \,-\, x^2]$ *em* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *com relação ao produto interno* $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ *definido acima.*

Exercício 5.46 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *com o produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; p(-1)q(-1) \;+\; p(0)q(0) \;+\; p(1)q(1)$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço $U = [2 - x]$ *em* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *com relação ao produto interno* $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$ *definido acima.*

Exercício 5.47 *Seja* U *o subespaço gerado pelo elemento* $u \;=\; (0,\, 1,\, -2,\, 1) \;\in\; I\!R^4$*. Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço* U *em* $I\!R^4$ *com relação ao produto interno usual.*

Exercício 5.48 *Seja* W *o subespaço de* $I\!R^5$ *gerado pelos vetores* $w_1 \;=\; (1,\, 2,\, 3,\, -1,\, 2)$ *e* $w_2 \;=\; (2,\, 1,\, 0,\, 2,\, -1)$ *. Encontre uma base para o complemento ortogonal do subespaço* W *em* $I\!R^5$ *com relação ao produto interno usual.*

Exercício 5.49 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *munido do produto interno usual. Seja* S *o subespaço de* $I\!R^3$ *definido por:*

$$S \;=\; \{\; (x, y, z) \;\in\; I\!R^3 \;\;/\;\; 2x \;-\; y \;+\; z \;=\; 0 \;\}\;.$$

Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço S *em* $I\!R^3$ *com relação ao produto interno usual.*

Exercício 5.50 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^4$ *munido do produto interno usual. Seja* U *o subespaço gerado pelo elemento* $u \;=\; (-1,\, 1,\, 1,\, -1)$*. Determine uma base ortogonal para o subespaço* $U^{\perp}$*.*

Exercício 5.51 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^3$ *com o produto interno usual. Seja* $T : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ *o operador linear definido por:*

$$T(x, y, z) \;=\; (x - y - z,\, -x + y + 2z,\, x - y)\,.$$

Determine uma base ortogonal para o subespaço $Im(T)$*.*

5.10 Identidade de Parseval

Teorema 5.10.1 *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$ com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal de V. Então, para todos $u, v \in V$ temos que*

$$\langle u , v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \overline{\langle v , q_j \rangle} .$$

Em particular para $u = v$, tem–se que

$$\| u \|_2^2 = \langle u , u \rangle = \sum_{j=1}^{n} | \langle u , q_j \rangle |^2 .$$

*que é uma generalização do **Teorema de Pitágoras**.*

Demonstração – Pelo Teorema 5.6.1, para todos $u, v \in V$, temos que

$$u = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j \qquad \text{e} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \langle v , q_i \rangle q_i$$

Calculando o produto interno entre os elementos u e v

$$\langle u , v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \overline{\langle v , q_i \rangle} \langle q_j , q_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \overline{\langle v , q_j \rangle}$$

obtemos o resultado desejado.

No caso em que $v = u$, tem–se que

$$\langle u , u \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \overline{\langle u , q_j \rangle} = \sum_{j=1}^{n} | \langle u , q_j \rangle |^2 ,$$

o que completa a demonstração. ■

Podemos observar que se V é um espaço vetorial real, a identidade de Parseval fica escrita como:

$$\langle u , v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \langle v , q_j \rangle \qquad \text{para todo} \qquad u, v \in V .$$

Exemplo 5.10.1 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *munido do produto interno usual e* $\beta = \{ (1,1), (-1,1) \}$ *uma base ortogonal. Dados os elementos* $u = (2,4)$ *e* $v = (1,2)$*, verifique a identidade de Parseval.*

Por simplicidade, vamos denotar $q_1 = (1,1)$ e $q_2 = (-1,1)$. Inicialmente, vamos obter uma base ortonormal $\beta' = \{ q_1', q_2' \}$ a partir da base ortogonal $\beta = \{ q_1, q_2 \}$. Assim, temos que

$$q_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \qquad \text{e} \qquad q_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\,.$$

Finalmente, aplicando a identidade de Parseval

$$10 = \langle u , v \rangle = \langle u , q_1' \rangle \langle v , q_1' \rangle + \langle u , q_2' \rangle \langle v , q_2' \rangle = 9 + 1 = 10$$

Podemos também verificar que

$$20 = \| u \|_2^2 = \langle u , u \rangle = \langle u , q_1' \rangle^2 + \langle u , q_2' \rangle^2 = 18 + 2 = 20$$

o que completa a verificação da identidade de Parseval.

Utilizando a notação $\langle \cdot , \cdot \rangle_V$ para o produto interno do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{F}$ e a notação $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{F}^n}$ para o produto interno do espaço vetorial $\mathbb{F}^n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, observamos facilmente que a **Identidade de Parseval** pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle u , v \rangle_V = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \overline{\langle v , q_j \rangle} = \langle [u]_\beta , [v]_\beta \rangle_{\mathbb{F}^n} \qquad \text{para todos} \qquad u, v \in V\,,$$

onde $[u]_\beta$ e $[v]_\beta$ são os vetores de coordenadas dos elementos u e v em relação à base ortonormal $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ de V, respectivamente.

5.11 Desigualdade de Bessel

Teorema 5.11.1 *Sejam V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ um conjunto ortonormal em V. Então, para todo $u \in V$ temos que*

$$\| u \|_2^2 \geq \sum_{i=1}^{n} | \langle u , q_i \rangle |^2 .$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $u \in S = [q_1, \cdots , q_n]$, isto é, o elemento $u \in S$ é escrito de modo único como:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u , q_i \rangle q_i .$$

Demonstração – Vamos considerar o subespaço S gerado pelos elementos do conjunto ortonormal β, isto é, $S = [q_1, \cdots , q_n]$. Pelo Teorema 5.9.1, da Decomposição Ortogonal, sabemos que todo elemento $u \in V$ é escrito de modo único como:

$$u = v + w \qquad \text{para} \qquad v \in S \quad \text{e} \quad w \in S^{\perp} ,$$

onde o elemento $v \in S$ é dado por:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle u , q_i \rangle q_i .$$

Além disso, temos a Fórmula de Pitágoras

$$\| u \|_2^2 = \| v \|_2^2 + \| w \|_2^2 .$$

Portanto, temos que

$$\| u \|_2^2 \geq \| v \|_2^2 = \langle v , v \rangle = \sum_{i=1}^{n} | \langle u , q_i \rangle |^2 .$$

Da Identidade de Parseval, podemos concluir que o elemento $u \in S$ se, e somente se,

$$\| u \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} | \langle u , q_i \rangle |^2 ,$$

o que completa a demonstração. ∎

Exemplo 5.11.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e o conjunto ortogonal* $\beta = \{ (1,1,-1,1), (-1,1,1,1) \}$. *Dado o elemento* $u = (2,4,1,-1) \in \mathbb{R}^4$, *verifique a desigualdade de Bessel.*

Por simplicidade, denotamos $q_1 = (1,1,-1,1)$ e $q_2 = (-1,1,1,1)$. Inicialmente, vamos obter um conjunto ortonormal $\beta' = \{ q_1', q_2' \}$ a partir do conjunto ortogonal $\beta = \{ q_1, q_2 \}$. Assim, temos que

$$q_1' = \frac{1}{2}(1,1,-1,1) \qquad \text{e} \qquad q_2' = \frac{1}{2}(-1,1,1,1) \, .$$

Os coeficientes de Fourier do elemento $u \in \mathbb{R}^4$ com relação ao conjunto ortonormal $\beta' = \{ q_1', q_2' \}$ são dados por:

$$\alpha_1 = \langle u \, , q_1' \rangle = 2 \qquad \text{e} \qquad \alpha_2 = \langle u \, , q_2' \rangle = 1 \, .$$

Finalmente, obtemos que

$$22 = \| u \|_2^2 > \langle u \, , q_1' \rangle^2 + \langle u \, , q_2' \rangle^2 = 5 \, .$$

Exemplo 5.11.2 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e o conjunto ortogonal* $\beta = \{ (1,1,-1,1), (-1,1,1,1) \}$. *Dado o elemento* $u = (5,1,-5,1) \in \mathbb{R}^4$, *verifique a desigualdade de Bessel. O que podemos concluir ?*

Por simplicidade, denotamos $q_1 = (1,1,-1,1)$ e $q_2 = (-1,1,1,1)$. Inicialmente, vamos obter um conjunto ortonormal $\beta' = \{ q_1', q_2' \}$ a partir do conjunto ortogonal $\beta = \{ q_1, q_2 \}$. Assim, temos que

$$q_1' = \frac{1}{2}(1,1,-1,1) \qquad \text{e} \qquad q_2' = \frac{1}{2}(-1,1,1,1) \, .$$

Os coeficientes de Fourier do elemento $u \in \mathbb{R}^4$ com relação ao conjunto ortonormal $\beta' = \{ q_1', q_2' \}$ são dados por:

$$\alpha_1 = \langle u \, , q_1' \rangle = 6 \qquad \text{e} \qquad \alpha_2 = \langle u \, , q_2' \rangle = -4 \, .$$

Finalmente, obtemos que

$$52 = \| u \|_2^2 = \langle u \, , q_1' \rangle^2 + \langle u \, , q_2' \rangle^2 = 52 \, .$$

Assim, podemos concluir que o elemento u pertence ao subespaço gerado pelos elementos do conjunto ortogonal β.

5.12 Operadores Simétricos

Definição 5.12.1 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, W *um subespaço de* V *e* $T : W \longrightarrow V$ *um operador linear. Dizemos que* T *é um operador* ***simétrico*** *em* W *se*

$$\langle T(u)\,,\, v \rangle \;=\; \langle u\,,\, T(v) \rangle$$

para todos $u,\, v \in W$.

Exemplo 5.12.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{C}([0,1])$ *munido do produto interno*

$$\langle f\,,\, g \rangle \;=\; \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Seja W *o subespaço de* $\mathcal{C}([0,1])$ *definido da seguinte forma*

$$W \;=\; \{\; u \;\in\; \mathcal{C}^2([0,1]) \;\;/\;\; u(0) \;=\; u(1) \;=\; 0 \;\}$$

O operador linear $T : W \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ *definido por* $T(u(x)) \;=\; -u''(x) \;+\; u(x)$ *é um operador simétrico em* W.

Vamos mostrar que T é simétrico em W. Para $u,\, v \in W$, temos que

$$\begin{aligned} \langle T(u)\,,\, v \rangle \;&=\; \int_0^1 T(u(x))v(x)dx \;=\; \int_0^1 (\, -u''(x) \;+\; u(x)\,)v(x)dx \\ &=\; -\int_0^1 u''(x)v(x)dx \;+\; \int_0^1 u(x)v(x)dx \\ &=\; \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \;+\; \int_0^1 u(x)v(x)dx \;=\; \langle u\,,\, T(v) \rangle \end{aligned}$$

Note que o resultado foi obtido fazendo uma integração por partes, na primeira integral da segunda linha, e utilizando o fato que a função $v \in W$ se anula nos extremos do intervalo de integração, isto é,

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx \;=\; (\, -u'(1)v(1) \;+\; u'(0)v(0)\,) \;+\; \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

Assim, provamos que T é um operador simétrico em W.

Teorema 5.12.1 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo* $\mathbb{F}$ *com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ *uma base ortonormal para* V *e* T *um operador linear sobre* V*. Então, a matriz* $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ *do operador linear* T *com relação à base ortonormal* β *é dada por* $a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle$.

Demonstração – Como $\beta = \{ q_1, \cdots , q_n \}$ é uma base ortonormal para V, pelo Teorema 5.6.1, temos que todo elemento $u \in V$ é escrito de modo único como:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u , q_i \rangle q_i .$$

Desse modo, temos que o elemento $T(q_j) \in V$ é escrito de modo único como:

$$T(q_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(q_j) , q_i \rangle q_i \qquad \text{para} \qquad j = 1, \cdots , n .$$

Portanto, os elemento da matriz $A = [a_{ij}]$, que é a matriz do operador linear T com relação à base ortonormal β, são dados como:

$$a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle \qquad \text{para} \qquad i, j = 1, \cdots , n ,$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 5.12.2 *Sejam* V *um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ *uma base ortonormal para* V*,* T *um operador linear sobre* V *e* $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ *a matriz do operador* T *com relação à base ortonormal* β*. Então,* T *é um operador simétrico se, e somente se,* A *é uma matriz simétrica.*

Demonstração – ($\Longrightarrow$) Vamos denotar por $A = [a_{ij}]$ a matriz do operador T com relação à base ortonormal β. Utilizando o resultado do Teorema 5.12.1 e a hipótese que T é um operador simétrico, temos que

$$a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle = \langle q_j , T(q_i) \rangle = a_{ji} .$$

Logo, $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ é uma matriz simétrica.

($\Longleftarrow$) Utilizando o resultado do Teorema 5.12.1 e a hipótese que $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ é uma matriz simétrica, temos que

$$a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle = a_{ji} = \langle q_j , T(q_i) \rangle .$$

Logo, T é um operador simétrico. ■

Exemplo 5.12.2 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *com o produto interno usual e o operador linear* T *sobre o* $I\!R^3$ *definido por* $T(x,y,z) = (x+2y, 2x+3y-z, -y+2z)$. *Mostre que* T *é um operador simétrico.*

Basta encontrar a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$ em relação à base canônica β. De fato,

$$T(1,0,0) \;=\; (1,2,0) \quad , \quad T(0,1,0) \;=\; (2,3,-1) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) \;=\; (0,-1,2)$$

Portanto, obtemos

$$[T]^{\beta}_{\beta} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz simétrica.

Definição 5.12.2 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, W *um subespaço de* V *e* $T : W \longrightarrow V$ *um operador linear. Dizemos que* T *é um operador* ***anti–simétrico*** *em* W *se*

$$\langle\, T(u) \,,\, v \,\rangle \;=\; -\langle\, u \,,\, T(v) \,\rangle$$

para todos $u, v \in W$.

Exemplo 5.12.3 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([a,b])$ *munido do produto interno*

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle \;=\; \int_a^b f(x)g(x)dx\,.$$

Seja W *o subespaço de* $\mathcal{C}([a,b])$ *definido por:*

$$W \;=\; \{\; f \,\in\, \mathcal{C}^1([a,b]) \;\;/\;\; f(a) \;=\; f(b) \;\}\,.$$

O operador linear $T : W \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$ *definido por:* $T(f)(x) \;=\; f'(x)$ *é um operador anti–simétrico em* W.

Proposição 5.12.1 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* T *um operador anti–simétrico sobre* V. *Então,* $\langle\, T(u) \,,\, u \,\rangle = 0$ *para todo* $u \in V$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 5.12.4 *Vamos utilizar o Exemplo 5.12.3 para ilustrar a Proposição 5.12.1.*

Devemos mostrar que

$$\langle\, T(f) \,,\, f \,\rangle \;=\; \int_a^b f'(x)f(x)dx \;=\; 0 \qquad \text{para toda} \qquad f \,\in\, W\,.$$

Teorema 5.12.3 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal para V, T um operador linear sobre V e $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ a matriz do operador linear T com relação à base ortonormal β. Então, T é um operador anti–simétrico se, e somente se, A é uma matriz anti–simétrica.*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Exemplo 5.12.5 *Considere o espaço vetorial real $I\!R^3$ com o produto interno usual e o operador linear T sobre o $I\!R^3$ definido por $T(x,y,z) = (-2y + z, 2x + 3z, -x - 3y)$. Mostre que T é um operador anti–simétrico.*

Basta encontrar a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$ em relação à base canônica β. Assim, temos que

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz anti–simétrica.

Exemplo 5.12.6 *Considere V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Sejam T_1 e T_2 operadores simétricos sobre V. Então, $aT_1 + bT_2$, para $a, b \in I\!R$, é um operador simétrico sobre V.*

Considerando o fato que T_1 e T_2 são operadores simétricos sobre V, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (aT_1 + bT_2)(u) , v \rangle &= \langle aT_1(u) + bT_2(u) , v \rangle \\
&= \langle aT_1(u) , v \rangle + \langle bT_2(u) , v \rangle \\
&= a\langle T_1(u) , v \rangle + b\langle T_2(u) , v \rangle \\
&= a\langle u , T_1(v) \rangle + b\langle u , T_2(v) \rangle \\
&= \langle u , aT_1(v) \rangle + \langle u , bT_2(v) \rangle \\
&= \langle u , aT_1(v) + bT_2(v) \rangle \\
&= \langle u , (aT_1 + bT_2)(v) \rangle
\end{aligned}$$

o que mostra o resultado desejado.

5.13 Operadores Hermitianos

Definição 5.13.1 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, W *um subespaço de* V *e* $T : W \longrightarrow V$ *um operador linear. Dizemos que* T *é um operador* ***Hermitiano*** *em* W *se*

$$\langle T(u) , v \rangle = \langle u , T(v) \rangle$$

para todos $u, v \in W$.

Nesta seção é importante recordar o conceito de transposta Hermitiana de uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, que denotamos por A^*, que é definida da forma $A^* = [\overline{a}_{ji}]$. Assim, dizemos que $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ é uma matriz Hermitiana se $A^* = A$.

Teorema 5.13.1 *Sejam* V *um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ *uma base ortonormal para* V, T *um operador linear sobre* V *e* $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ *a matriz do operador* T *com relação à base ortonormal* β. *Então,* T *é um operador Hermitiano se, e somente se,* A *é uma matriz Hermitiana.*

Demonstração – ($\Longrightarrow$) Vamos denotar por $A = [a_{ij}]$ a matriz do operador T com relação à base ortonormal β. Utilizando o resultado do Teorema 5.12.1 e a hipótese que T é um operador Hermitiano, temos que

$$a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle = \langle q_j , T(q_i) \rangle = \overline{\langle T(q_i) , q_j \rangle} = \overline{a}_{ji} \, .$$

Logo, $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ é uma matriz Hermitiana.

($\Longleftarrow$) Utilizando o resultado do Teorema 5.12.1 e a hipótese que $A = [T]^{\beta}_{\beta}$ é uma matriz Hermitiana, temos que

$$a_{ij} = \langle T(q_j) , q_i \rangle = \overline{a}_{ji} = \overline{\langle T(q_i) , q_j \rangle} = \langle q_j , T(q_i) \rangle \, .$$

Logo, T é um operador Hermitiano. ■

Teorema 5.13.2 *Considere V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e T um operador linear sobre V. Então, T é Hermitiano se, e somente se, $\langle T(u) , u \rangle \in I\!R$ para todo $u \in V$.*

Demonstração – Tomando a hipótese que T é um operador Hermitiano. Para todo $u \in V$, temos que

$$\overline{\langle u , T(u) \rangle} = \langle T(u) , u \rangle = \langle u , T(u) \rangle \implies \langle T(u) , u \rangle \in I\!R .$$

Considerando a hipótese de que $\langle T(u) , u \rangle \in I\!R$, temos que

$$\langle T(u) , u \rangle = \overline{\langle u , T(u) \rangle} = \langle u , T(u) \rangle \quad \text{para todo} \quad u \in V .$$

Portanto, temos que T é um operador Hermitiano, o que completa a demonstração. ■

Definição 5.13.2 *Sejam V um espaço vetorial complexo munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, W um subespaço de V e $T : W \longrightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador **anti–Hermitiano** em W se*

$$\langle T(u) , v \rangle = -\langle u , T(v) \rangle$$

para todos $u, v \in W$.

Teorema 5.13.3 *Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal para V, T um operador linear sobre V e $A = [T]_\beta^\beta$ a matriz do operador T com relação à base ortonormal β. Então, T é um operador anti–Hermitiano se, e somente se, A é uma matriz anti–Hermitiana ($A^* = -A$).*

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

5.14 Operadores Ortogonais

Definição 5.14.1 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e W um subespaço de V. Seja $T : W \longrightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um operador* ***ortogonal*** *em W se*

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

para todos $u, v \in W$.

Podemos verificar facilmente que se T é um operador ortogonal em V, então T preserva a norma Euclidiana, isto é, $\| T(u) \|_2 = \| u \|_2$ para todo $u \in V$. Assim, dizemos que T é uma **isometria** sobre V.

Proposição 5.14.1 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finitas com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e T um operador ortogonal sobre V. Então, T é um automorfismo.*

Demonstração – Basta provar que T é um operador injetor, isto é, $Ker(T) = \{ 0_V \}$, e pelo Teorema do núcleo e da imagem, temos que $Im(T) = V$.

Tomando um elemento $u \in Ker(T)$, temos que

$$T(u) = 0_V \implies \| T(u) \|_2 = 0 \implies \| u \|_2 = 0 \implies u = 0_V .$$

Portanto, $Ker(T) = \{ 0_V \}$, o que completa a demonstração. ■

Proposição 5.14.2 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e T uma isometria sobre V. Então, T^{-1} é uma isometria sobre V.*

Demonstração – Sabemos que T é um isomorfismo sobre V, pois T é uma isometria sobre V. Logo, T^{-1} existe. Desse modo,

$$\langle T^{-1}(u), T^{-1}(v) \rangle = \langle T(T^{-1}(u)), T(T^{-1}(v)) \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Portanto, mostramos que T^{-1} é uma isometria sobre V. ■

Proposição 5.14.3 *Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e T um operador linear sobre V. Então, T é uma isometria sobre V se, e somente se, T é um operador ortogonal em V.*

Demonstração

($\Longrightarrow$) Tomando a hipótese que T é uma isometria sobre V, obtemos

$$\langle T(u-v) , T(u-v) \rangle = \langle u-v , u-v \rangle = \langle u , u \rangle - 2\langle u , v \rangle + \langle v , v \rangle .$$

para todos $u, v \in V$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \langle T(u-v) , T(u-v) \rangle &= \langle T(u) , T(u) \rangle - 2\langle T(u) , T(v) \rangle + \langle T(v) , T(v) \rangle \\ &= \langle u , u \rangle - 2\langle T(u) , T(v) \rangle + \langle v , v \rangle \end{aligned}$$

Portanto, comparando as duas expressões, obtemos

$$\langle T(u) , T(v) \rangle = \langle u , v \rangle$$

para todos $u, v \in V$. Logo, mostramos que T é um operador ortogonal em V.

($\Longleftarrow$) Tomando a hipótese que T é um operador ortogonal em V, isto é,

$$\langle T(u) , T(v) \rangle = \langle u , v \rangle \qquad \text{para todos} \quad u, v \in V ,$$

obtemos $\langle T(v) , T(v) \rangle = \langle v , v \rangle$ para todo $v \in V$. Logo, $\| T(v) \|_2 = \| v \|_2$ para todo $v \in V$. Portanto, provamos que T é uma isometria sobre V. ■

Proposição 5.14.4 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, T e P isometrias sobre V. Então, $T \circ P$ é uma isometria sobre V.*

Demonstração – Tomando a hipótese que T e P são isometrias sobre V, isto é,

$$\| T(v) \|_2 = \| v \|_2 \qquad \text{e} \qquad \| P(v) \|_2 = \| v \|_2$$

para todo $v \in V$, obtemos

$$\| (T \circ P)(v) \|_2 = \| (T(P(v)) \|_2 = \| P(v) \|_2 = \| v \|_2$$

para todo $v \in V$. Portanto, temos que $T \circ P$ é uma isometria sobre V. ■

Exemplo 5.14.1 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$ *munido do produto interno usual. Os operadores lineares* $T(x,y) = (x, -y)$ *e* $P(x,y) = (-x, -y)$, *que representam uma reflexão em torno do eixo–ox e uma reflexão em torno da origem, respectivamente, são isometrias sobre o* $\mathbb{R}^2$. *Assim, o operador linear* $T \circ P$ *sobre o* $\mathbb{R}^2$ *que é dado por:*

$$(T \circ P)(x,y) = T(P(x,y)) = T(-x,-y) = (-x,y) ,$$

que representa uma reflexão em torno do eixo–oy, é uma isometria sobre o $\mathbb{R}^2$.

Teorema 5.14.1 *Sejam* V *um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ *uma base ortonormal para* V *e* T *um operador linear sobre* V. *Então,* T *é um operador ortogonal em* V *se, e somente se,* T *leva a base ortonormal* β *na base ortonormal* $\{ T(q_1) , \cdots , T(q_n) \}$ *de* V.

Demonstração – Para todo $u, v \in V$ temos que

$$u = \sum_{i=1}^{n} b_i \, q_i \qquad \text{e} \qquad v = \sum_{j=1}^{n} c_j \, q_j$$

onde b_i e c_i , $i = 1, \cdots , n$, são os coeficientes de Fourier de u e de v com relação à base ortonormal β, respectivamente. Pela identidade de Parseval, temos que

$$\langle u , v \rangle = \sum_{i=1}^{n} b_i \, c_i$$

Desse modo, temos que

$$\langle T(u) , T(v) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_i \, c_j \, \langle T(q_i) , T(q_j) \rangle$$

Portanto, $\langle T(u) , T(v) \rangle = \langle u , v \rangle$ se, e somente se, $\{ T(q_1) , \cdots , T(q_n) \}$ é um conjunto ortonormal em V, o que completa a demonstração. ■

Definição 5.14.2 *Dizemos que* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é uma matriz* **ortogonal** *se* $Q^tQ = I$. *Assim, temos que* $QQ^t = I$. *Desse modo, tem–se que* $Q^{-1} = Q^t$.

Teorema 5.14.2 *Uma matriz* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é ortogonal se, e somente se, suas colunas (suas linhas) formam um conjunto ortonormal em* $\mathbb{R}^n$.

Demonstração – A prova pode ficar a cargo do leitor. □

Teorema 5.14.3 *Sejam* V *um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ *uma base ortonormal para* V, T *um operador linear sobre* V *e* $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ *a matriz do operador* T *com relação à base ortonormal* β. *Então,* T *é um operador ortogonal se, e somente se,* A *é uma matriz ortogonal.*

Demonstração – Seja $A = [a_{ij}]$ a representação matricial do operator T com relação à base ortonormal β, isto é,

$$T(q_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \, q_k \qquad \text{e} \qquad T(q_j) = \sum_{r=1}^{n} a_{rj} \, q_r$$

Desse modo, temos que

$$\langle T(q_i) , T(q_j) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ki} \, a_{rj} \, \langle q_k , q_r \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \, a_{kj}$$

Portanto,

$$\langle T(q_i) , T(q_j) \rangle = \delta_{ij} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \, a_{kj} = \delta_{ij} ,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, o que completa a demonstração. ■

Teorema 5.14.4 *Seja* V *é um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *com* β *e* γ *duas bases ortonormais de* V. *Então, a matriz de mudança de base* $[I]_{\beta}^{\gamma}$ *é uma matriz ortogonal.*

Demonstração – Digamos que $dim(V) = n$. Sejam $\beta = \{ q_1, \cdots , q_n \}$ e $\gamma = \{ v_1, \cdots , v_n \}$. Vamos denotar por $C = [c_{ij}] = [I]_{\beta}^{\gamma}$. Assim, temos que

$$v_j = \sum_{l=1}^{n} c_{lj} \, q_l \qquad \text{e} \qquad v_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \, q_k$$

Pela identidade de Parseval tem–se que

$$\langle v_i , v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \, c_{kj} \qquad \Longrightarrow \qquad C^t \, C = I$$

pois $\langle v_i , v_j \rangle = 1$ para $i = j$ e $\langle v_i , v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, o que completa a demonstração. ■

Exercícios

Exercício 5.52 *Considere* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$*. Sejam* T_1 *e* T_2 *operadores simétricos sobre* V*. Então,* $T_1 \circ T_2$ *é um operador simétrico sobre* V *se, e somente se,* $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$*.*

Exercício 5.53 *Considere* V *um espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* T *um operador linear simétrico sobre* V*. Mostre que* $Ker(T) = (\, Im(T)\,)^{\perp}$*.*

Exercício 5.54 *Considere* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$*. Sejam* T_1 *e* T_2 *operadores Hermitianos sobre* V*. Então,* $aT_1 + bT_2$*, para* $a, b \in I\!\!R$*, é um operador Hermitiano sobre* V*.*

Exercício 5.55 *Considere* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$*. Sejam* T_1 *e* T_2 *operadores Hermitianos sobre* V*. Então,* $T_1 \circ T_2$ *é um operador Hermitiano sobre* V *se, e somente se,* $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$*.*

Exercício 5.56 *Considere* V *um espaço vetorial complexo munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$*. Seja* T *um operador Hermitiano sobre* V*. Então,*

$$\| \, T(u) \, \pm \, iu \, \|_2^2 \; = \; \| \, T(u) \, \|_2^2 \; + \; \| \, u \, \|_2^2 \qquad \textit{para todo} \qquad u \in V \, .$$

Exercício 5.57 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $T \in L(V)$*. Mostre que duas quaisquer das propriedades implicam a outra:*

(a) T *é simétrico.*

(b) T *é uma isometria sobre* V*.*

(c) $T^2 = I$*.*

Exercício 5.58 *Seja* $Q \in I\!\!M_2(I\!\!R)$ *a matriz que representa uma rotação de um ângulo* θ *no sentido anti–horário, isto é,*

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} .$$

Mostre que Q *é uma matriz ortogonal.*

Exercício 5.59 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *com o produto interno usual e seja* T *o operador linear sobre* $\mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$T(x, y, z) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta),\, x\sin(\theta) + y\cos(\theta),\, z)\,,$$

onde θ *é um ângulo fixo. Mostre que* T *é um operador ortogonal.*

Exercício 5.60 *Considere* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *e* W *um subespaço de dimensão finita de* V*. Sabemos que* $V = W \oplus W^{\perp}$*, isto é, todo elemento* $v \in V$ *é escrito de modo único da forma* $v = w + u$ *com* $w \in W$ *e* $u \in W^{\perp}$*. Seja* T *o operador linear sobre* V *definido da seguinte forma:* $T(v) = w - u$ *para todo* $v \in V$*.*

(a) Prove que T *é um operador linear simétrico e ortogonal em* V*.*

(b) Considerando $V = \mathbb{R}^3$ *com o produto interno usual e* W *o subespaço gerado pelo elemento* $w = (1, 1, 1)$*, encontre a matriz do operador linear* T *com relação à base canônica do* $\mathbb{R}^3$*.*

Exercício 5.61 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *e* G *o conjunto de todos os operadores ortogonais sobre* V*, isto é,*

$$G = \{\, T : V \longrightarrow V \;\;/\;\; T \text{ é um operador ortogonal} \,\}\,.$$

Mostre que G *tem uma* ***estrutura de grupo*** *em relação à operação de composição, isto é,* $(G, \circ)$ *é um* ***grupo****.*

Exercício 5.62 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ *e* T *uma isometria sobre* V*. Mostre que* T *preserva o cosseno do ângulo entre dois elementos não–nulos de* V*.*

Exercício 5.63 *Considere a matriz* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $B = (I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}$ *é uma matriz ortogonal.*

Exercício 5.64 *Considere o espaço vetorial real* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *munido do produto interno usual. Dada uma matriz* $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*, definimos o operador linear* T_Q *sobre* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *da seguinte forma:* $T_Q(X) = QX$*. Mostre que* T_Q *é uma isometria sobre* $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *se, e somente se,* Q *é uma matriz ortogonal.*

5.15 Projeção Ortogonal

A partir do Teorema da Decomposição Ortogonal temos a definição de projeção ortogonal, que é extremamente útil para a solução e interpretação geométrica de certas aplicações da Álgebra Linear.

Definição 5.15.1 *Sejam V um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e S um subespaço de dimensão finita de V, com $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal de S. Dado um elemento $u \in V$, o elemento $\widetilde{u} \in S$ definido por:*

$$\widetilde{u} = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \, q_j$$

é a projeção ortogonal do elemento u sobre o subespaço S e o elemento $w = u - \widetilde{u}$ é a projeção ortogonal do elemento u sobre o subespaço $S^{\perp}$.

Podemos observar que se $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ é uma **base ortogonal** para S, então a projeção ortogonal do elemento $u \in V$ sobre o subespaço S é dado por

$$\widetilde{u} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle u , q_j \rangle}{\langle q_j , q_j \rangle} \, q_j \, .$$

Exemplo 5.15.1 *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Seja W o subespaço gerado pelo elemento $w = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Calcule a projeção ortogonal do elemento $u = (2, -1, 4) \in \mathbb{R}^3$ sobre o subespaço W e sobre o subespaço $W^{\perp}$.*

Pela Definição 5.15.1, temos que a projeção ortogonal de u sobre W é dada por:

$$\widetilde{u} = \frac{\langle u , w \rangle}{\langle w , w \rangle} w$$

Pelo Teorema 5.9.1 (Decomposição Ortogonal), temos que o elemento $v \in W^{\perp}$ dado por:

$$v = u - \widetilde{u} = u - \frac{\langle u , w \rangle}{\langle w , w \rangle} w$$

é a projeção ortogonal de u sobre o subespaço $W^{\perp}$. Assim, obtemos

$$\widetilde{u} = \frac{11}{6}(1, -1, 2) \qquad \text{e} \qquad v = (2, -1, 4) - \frac{11}{6}(1, -1, 2) = \frac{1}{6}(1, 5, 2) \, .$$

Exemplo 5.15.2 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^n$ *com o produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *. Seja* W *o subespaço gerado pelo elemento* $w \in I\!R^n$ *não–nulo. Dado um elemento* $u \in I\!R^n$*, determinar sua projeção ortogonal sobre* W*. Utilizando o Teorema 5.9.1, da decomposição ortogonal, determine a projeção ortogonal de* u *sobre o subespaço* $W^\perp$*.*

Pela definição 5.15.1, temos que a projeção ortogonal de u sobre W é dada por

$$\widetilde{u} \; = \; \frac{\langle u \, , \, w \rangle}{\langle w \, , \, w \rangle} w$$

Pelo teorema da decomposição ortogonal, temos que

$$v \; = \; u \; - \; \widetilde{u} \; = \; u \; - \; \frac{\langle u \, , \, w \rangle}{\langle w \, , \, w \rangle} w$$

é a projeção ortogonal de u no subespaço $W^\perp$.

Exemplo 5.15.3 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $\| \cdot \|_2$ *a norma Euclidiana. Considerando os elementos* $u, v \in V$*, com* $v \neq 0_V$*, determine o elemento* w^* *do conjunto* $S = \{ \, w \in V \;\; / \;\; w \; = \; u \; - \; tv \;\; , \;\; t \in I\!R \, \}$ *que possui a menor norma Euclidiana. Dê uma interpretação geométrica para* w^**.*

Temos que encontrar um elemento $w^* \in S$ tal que

$$\| \, w^* \, \|_2 \; = \; \min\{ \, \| \, w \, \|_2 \;\; ; \;\; w \in S \, \} \quad \Longleftrightarrow \quad \| \, w^* \, \|_2^2 \; = \; \min\{ \, \| \, u - tv \, \|_2^2 \;\; ; \;\; t \in I\!R \, \}$$

Portanto, temos que encontrar o mínimo da função $g(t)$ dada por

$$g(t) \; = \; \| \, u - tv \, \|_2^2 \; = \; \langle \, u - tv \, , \, u - tv \, \rangle \; = \; \langle \, u \, , \, u \, \rangle \; - \; 2t \langle \, u \, , \, v \, \rangle \; + \; t^2 \langle \, v \, , \, v \, \rangle \quad ; \quad t \in I\!R$$

Inicialmente, vamos calcular os pontos críticos, fazendo $g'(t) \; = \; 0$, obtemos

$$t^* \; = \; \frac{\langle \, u \, , \, v \, \rangle}{\langle \, v \, , \, v \, \rangle} \qquad \Longrightarrow \qquad w^* \; = \; u \; - \; t^* v \; = \; u \; - \; \frac{\langle \, u \, , \, v \, \rangle}{\langle \, v \, , \, v \, \rangle} v$$

Temos que classificar o único ponto crítico da função g, calculando $g''(t)$, obtemos

$$g''(t) \; = \; 2 \, \langle \, v \, , \, v \, \rangle \; > \; 0 \quad ; \quad v \neq 0_V$$

Assim, t^* é um ponto de mínimo global da função g e o elemento $w^* = u \; - \; t^* v \in S$ é o elemento de menor norma Euclidiana.

Portanto, o elemento w^* é a projeção ortogonal do elemento u sobre o subespaço $U^\perp$ e o elemento $u^* \; = \; t^* v$ é a projeção ortogonal do elemento u sobre o subespaço $U = [v]$. Mais a frente vamos dar uma nova interpretação para a projeção ortogonal.

Vamos representar as projeções ortogonais através de operadores lineares. Considerando a definição de **projeção ortogonal**, definimos um operador P sobre V da forma:

$$P(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j \qquad \text{para todo} \qquad u \in V .$$

Podemos verificar facilmente que P é um operador linear sobre V. Desse modo, vamos denominar P como sendo o **operador de projeção ortogonal** sobre o subespaço S. Portanto, temos que $Im(P) = S$. Para o operador de projeção ortogonal podemos apresentar os seguintes resultados.

Teorema 5.15.1 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e P o operador de projeção ortogonal sobre S. Então, P é um operador **simétrico**, isto é,*

$$\langle P(u) , v \rangle = \langle u , P(v) \rangle \qquad ; \qquad \forall \ u, v \in V$$

Demonstração – Seja $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal para S. Dado um elemento $u \in V$ sabemos que sua projeção ortogonal sobre S é dado por

$$P(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j$$

Desse modo, temos que

$$\langle P(u) , v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle \langle q_j , v \rangle = \langle u , \sum_{j=1}^{n} \langle v , q_j \rangle q_j \rangle = \langle u , P(v) \rangle$$

o que completa a prova. ■

Teorema 5.15.2 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e P o operador de projeção ortogonal sobre S. Então, $P^2 = P$ (**idempotente**), isto é, $P^2(u) = P(u)$ para todo $u \in V$.*

Demonstração – Seja $\beta = \{ q_1 , \cdots , q_n \}$ uma base ortonormal para S. Dado um elemento $u \in V$ sabemos que sua projeção ortogonal sobre S é dado por

$$P(u) = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j$$

Desse modo, temos que

$$P^2(u) = P\left(\sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle P(q_j) = \sum_{j=1}^{n} \langle u , q_j \rangle q_j = P(u)$$

desde que $P(q_j) = q_j$ para $j = 1, \cdots , n$. O que completa a prova. ■

Podemos observar que se $P^2 = P$ então, $P(u) = u$, para todo $u \in Im(P)$. De fato,

$$u \in Im(P) \implies u = P(v) \implies P(u) = P(P(v)) = P(v) = u\,.$$

Definição 5.15.2 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e P um operador linear sobre V. Dizemos que P é um operador de projeção ortogonal se P for simétrico e idempotente.*

Teorema 5.15.3 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e P o operador de projeção ortogonal sobre S. Então, $Ker(P) = S^{\perp}$.*

Demonstração – Inicialmente, tomamos $u \in Ker(P)$, isto é, $P(u) = 0_V$. Desse modo, para todo $v \in V$, temos que

$$0 = \langle P(u) , v \rangle = \langle u , P(v) \rangle\,.$$

como $P(v) \in Im(P) = S$, obtemos que $u \in S^{\perp}$. Assim, $Ker(P) \subset S^{\perp}$.

Finalmente, tomamos $v \in S^{\perp}$, isto é, $\langle v , u \rangle = 0$ para todo $u \in S$. Como $u = P(w)$ para $w \in V$. Desse modo, obtemos

$$\langle v , u \rangle = \langle v , P(w) \rangle = \langle P(v) , w \rangle = 0 \qquad \text{para todo} \qquad w \in V\,.$$

Logo, $P(v) = 0_V$ o que implica em $v \in Ker(P)$.

Assim, mostramos que $S^{\perp} \subset Ker(P)$. Portanto, provamos que $Ker(P) = S^{\perp}$. ■

O Teorema 5.15.3 apresenta um resultado muito interessante para o estudo de autovalores e autovetores, que iremos ver no Capítulo 6. Podemos apresentar tal resultado da forma

$$P(u) = 0_V \qquad \text{para todo} \qquad u \in S^{\perp}$$

para que possamos obter as conclusões desejadas.

Corolário 5.15.1 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e P o operador de projeção ortogonal sobre S. Então, $V = Ker(P) \oplus Im(P)$.*

Teorema 5.15.4 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e P o operador de projeção ortogonal sobre S. Então, $I - P$ é o operador de projeção ortogonal sobre o subespaço $S^{\perp}$.*

Demonstração – Dado um elemento $u \in V$, temos que $P(u) \in S$. Vamos mostrar que o elemento $u - P(u)$ é ortogonal ao elemento $P(u)$. Pelo Teorema 5.15.1, sabemos que P é simétrico. Assim, temos que

$$\langle P(u) , u - P(u) \rangle = \langle u , P(u - P(u)) \rangle = \langle u , P(u) - P^2(u) \rangle$$

Pelo Teorema 5.15.2, sabemos que $P^2 = P$. Logo, obtemos

$$\langle P(u) , u - P(u) \rangle = \langle u , P(u) - P(u) \rangle = \langle u , 0_V \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \; u \in V$$

Portanto, $u - P(u) \in S^{\perp}$ para todo $u \in V$. Assim, provamos que $Im(I - P) = S^{\perp}$.

Podemos verificar facilmente que $I - P$ é um operador idempotente. De fato,

$$(I - P)^2 = (I - P)(I - P) = I - 2P + P^2 = I - P$$

Temos também que $I - P$ é um operador simétrico. De fato,

$$\langle (I - P)(u) , v \rangle = \langle u , v \rangle - \langle P(u) , v \rangle = \langle u , v \rangle - \langle u , P(v) \rangle = \langle u , (I - P)(v) \rangle$$

o que completa a prova. ■

Corolário 5.15.2 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e P um operador linear sobre V. Então, o operador P é simétrico e idempotente se, e somente se, P projeta ortogonalmente todo elemento $v \in V$ sobre o subespaço $Im(P)$.*

Exemplo 5.15.4 *Determine a projeção ortogonal do elemento $u = (2, 1, 2, 1) \in I\!R^4$ no subespaço $S = [q_1, q_2]$ onde $q_1 = (1, -1, 1, -1)$ e $q_2 = (-2, 1, 4, 1)$.*

Note que os geradores do subespaço S são ortogonais entre si. Logo, é uma base ortogonal para S. Desse modo, temos que a projeção ortogonal do elemento u sobre o subespaço S é dado por

$$\widetilde{u} = \frac{\langle u , q_1 \rangle}{\langle q_1 , q_1 \rangle} q_1 + \frac{\langle u , q_2 \rangle}{\langle q_2 , q_2 \rangle} q_2 = \frac{1}{2} q_1 + \frac{3}{11} q_2 .$$

Assim, temos também que o elemento $w \in I\!R^4$ dado por:

$$w = u - \widetilde{u} = u - \left(\frac{1}{2} q_1 + \frac{3}{11} q_2 \right)$$

é a projeção ortogonal do elemento u sobre o subespaço $S^{\perp}$.

Teorema 5.15.5 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, β uma base para V, P um operador linear sobre V e $[P]_{\beta}^{\beta}$ a matriz do operador P com relação à base β. Então, P é um operador idempotente se, e somente se, $[P]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz idempotente.*

Demonstração – Para todo $v \in V$, temos que $[P(v)]_{\beta} = [P]_{\beta}^{\beta} [v]_{\beta}$.

Pelo Teorema 4.8.3, temos que

$$[P^2(v)]_{\beta} = [(P \circ P)(v)]_{\beta} = ([P]_{\beta}^{\beta})^2 [v]_{\beta} \qquad \text{para todo} \qquad v \in V .$$

Tomando por hipótese que P é um operador idempotente, temos que

$$[P^2(v)]_{\beta} = ([P]_{\beta}^{\beta})^2 [v]_{\beta} = [P(v)]_{\beta} = [P]_{\beta}^{\beta} [v]_{\beta} \qquad \text{para todo} \qquad v \in V .$$

Portanto, provamos que $([P]_{\beta}^{\beta})^2 = [P]_{\beta}^{\beta}$, isto é, $[P]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz idempotente.

Tomando por hipótese que $[P]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz idempotente, temos que

$$[P^2(v)]_{\beta} = ([P]_{\beta}^{\beta})^2 [v]_{\beta} = [P]_{\beta}^{\beta} [v]_{\beta} = [P(v)]_{\beta} \qquad \text{para todo} \qquad v \in V .$$

Portanto, provamos que $P^2(v) = P(v)$ para todo $v \in V$. Logo, P é um operador idempotente, o que completa a demonstração. ■

Corolário 5.15.3 *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, β uma base ortonormal para V, P um operador linear sobre V e $[P]_{\beta}^{\beta}$ a matriz do operador P com relação à base ortonormal β. Então, P é um operador de projeção ortogonal se, e somente se, $[P]_{\beta}^{\beta}$ é uma matriz simétrica e idempotente.*

Exemplo 5.15.5 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^2$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Seja* W *o subespaço gerado pelo elemento* $w = (1,2) \in I\!R^2$. *Seja* P *o operador de projeção ortogonal sobre o subespaço* W. *Determine o operador* $P(x,y)$.

Dado um elemento genérico $u = (x,y) \in I\!R^2$, pela definição 5.15.1, temos que o operador de projeção ortogonal sobre W é dado por:

$$P(x,y) \;=\; \frac{\langle\, u \,,\, w \,\rangle}{\langle\, w \,,\, w \,\rangle} w \;=\; \frac{1}{5}(x + 2y,\, 2x + 4y)\,.$$

Para exemplificar que β não precisa ser uma base ortonormal no Teorema 5.15.5, vamos determinar a matriz $[P]^{\beta}_{\beta}$ com relação à base $\beta = \{\ (1,1),\, (0,1)\,\}$, para o caso do Exemplo 5.15.5. Desse modo, obtemos que

$$[P]^{\beta}_{\beta} \;=\; \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar facilmente que $[P]^{\beta}_{\beta}$ é uma matriz idempotente, mas não é simétrica, pois β não é ortonormal.

Exemplo 5.15.6 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Seja* W *o subespaço gerado pelo elemento* $w = (1,-1,2) \in I\!R^3$. *Seja* P *o operador de projeção ortogonal sobre o subespaço* W. *Determine o operador* $P(x,y,z)$ *e a matriz* $[P]^{\beta}_{\beta}$, *em relação à base canônica do* $I\!R^3$.

Dado um elemento genérico $u = (x,y,z) \in I\!R^3$, pela definição 5.15.1, temos que o operador de projeção ortogonal sobre W é dado por:

$$P(x,y,z) \;=\; \frac{\langle\, u \,,\, w \,\rangle}{\langle\, w \,,\, w \,\rangle} w \;=\; \frac{1}{6}(x - y + 2z,\, -x + y - 2z,\, 2x - 2y + 4z)\,.$$

Portanto, a matriz $[P]^{\beta}_{\beta}$ é dada por:

$$[P]^{\beta}_{\beta} \;=\; \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

onde β é a base canônica do $I\!R^3$. Podemos verificar facilmente que a matriz $[P]^{\beta}_{\beta}$ é simétrica e idempotente, pois β é uma base ortonormal, de acordo com o Corolário 5.15.3.

Exercícios

Exercício 5.65 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *com o produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Seja* W *o subespaço gerado pelo elemento* $w \in \mathbb{R}^n$, *não–nulo, e* P *o operador de projeção ortogonal sobre* W. *Mostre que a matriz* $[P]^{\beta}_{\beta}$, *onde* β *é a base canônica do* $\mathbb{R}^n$, *é dada por:*

$$[P]^{\beta}_{\beta} \;=\; \frac{ww^t}{w^t w}\,,$$

considerando que o elemento $w \in \mathbb{R}^n$ *está representado na forma de vetor coluna.*

Exercício 5.66 *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Seja* S *o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *dado por:* $S = [(1,1,1)]$ *e* $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *o operador de projeção ortogonal sobre* S. *Determine o operador* $P(x,y,z)$.

Exercício 5.67 *Seja* $P : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *o operador linear tal que* $u = P(v)$ *é a projeção ortogonal do elemento* $v \in \mathbb{R}^3$ *no plano* $3x + 2y + z = 0$. *Pede-se:*

(a) *Encontre o operador* $P(x,y,z)$.

(b) *Determine a imagem do operador* P.

(c) *Determine o núcleo do operador* P.

Exercício 5.68 *Seja* $H = \{ x \in \mathbb{R}^n \;/\; \langle x , c \rangle = 0 \}$ *para* $c \in \mathbb{R}^n$, *fixo. Pede–se:*

(a) *Determine o subespaço* $H^{\perp}$.

(b) *Dado um elemento* $u \in \mathbb{R}^n$, *determine sua projeção ortogonal no subespaço* $H^{\perp}$.

(c) *Dado um elemento* $u \in \mathbb{R}^n$, *determine sua projeção ortogonal no subespaço* H.

Exercício 5.69 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *com o produto interno*

$$\langle p , q \rangle \;=\; \int_0^1 p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall\; p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\,.$$

Determine a projeção ortogonal do elemento $q(x) = x^2$ *sobre o subespaço* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

Resposta: $\boxed{\widetilde{q}(x) \;=\; -\frac{1}{6} \;+\; x}$

5.16 Reflexão sobre um Subespaço

Definição 5.16.1 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e $P : V \longrightarrow V$ o operador de projeção ortogonal sobre S. O operador $R : V \longrightarrow V$ definido por: $R = 2P - I$, isto é,*

$$R(v) = 2P(v) - v \qquad \text{para todo} \qquad v \in V,$$

*é a **reflexão** sobre o subespaço S, paralelamente ao subespaço $S^{\perp}$.*

A seguir vamos apresentam dois exemplos que são muito interessantes para o estudo de autovalores e autovetores, que iremos ver no Capítulo 6.

Exemplo 5.16.1 *Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de dimensão finita de V. Seja R o operador de reflexão sobre S. Podemos verificar facilmente que $R(w) = -w$ para todo $w \in S^{\perp}$.*

Exemplo 5.16.2 *Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e S um subespaço de dimensão finita de V. Seja R o operador de reflexão sobre S. Podemos verificar facilmente que $R(u) = u$ para todo $u \in S$.*

Teorema 5.16.1 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e R o operador de reflexão sobre S, paralelamente ao subespaço $S^{\perp}$. Então, R é um operador simétrico, isto é,*

$$\langle R(u), v \rangle = \langle u, R(v) \rangle \qquad \text{para todo} \qquad u, v \in V.$$

Demonstração – Fazendo uso da definição de operador simétrico e do fato que o operador de projeção ortogonal P é simétrico, temos que

$$\begin{aligned}
\langle R(u), v \rangle &= \langle 2P(u) - u, v \rangle \\
&= 2\langle P(u), v \rangle - \langle u, v \rangle \\
&= \langle u, 2P(v) \rangle - \langle u, v \rangle \\
&= \langle u, 2P(v) - v \rangle \\
&= \langle u, R(v) \rangle
\end{aligned}$$

para todo $u, v \in V$. Portanto, R é um operador simétrico. ■

Teorema 5.16.2 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e R o operador de reflexão sobre S, paralelamente ao subespaço $S^\perp$. Então, R é um operador auto–reflexivo ($R^2 = I$), isto é, $(R \circ R)(v) = R(R(v)) = v$ para todo $v \in V$.*

Demonstração – Fazendo uso do fato que o operador de projeção ortogonal P é idempotente, isto é $P^2 = P$, temos que

$$R^2 = (2P - I)(2P - I) = 4P^2 - 4P + I = I .$$

Portanto, R é um operador auto–reflexivo. ■

Teorema 5.16.3 *Sejam V um espaço vetorial real com o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e R o operador de reflexão sobre S, paralelamente ao subespaço $S^\perp$. Então, R é um operador ortogonal, isto é,*

$$\langle R(u) , R(v) \rangle = \langle u , v \rangle \qquad \textit{para todos} \qquad u, v \in V .$$

Demonstração – A prova é feito utilizando o fato que R é um operador simétrico e auto–reflexivo. De fato,

$$\langle R(u) , R(v) \rangle = \langle u , R(R(v)) \rangle = \langle u , R^2(v) \rangle = \langle u , v \rangle$$

para todos $u, v \in V$. Portanto, R é um operador ortogonal. ■

Podemos observar que, como R é um operador ortogonal em V, temos que R preserva a norma Euclidiana, isto é, $\| R(u) \|_2 = \| u \|_2$ para todo $u \in V$. Assim, R é uma **isometria** sobre V.

Exemplo 5.16.3 *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^2$ dado por: $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - 2y = 0 \}$. Dado o elemento $u = (-1,2) \in \mathbb{R}^2$, determine sua reflexão sobre o subespaço S.*

Temos que o subespaço S é gerado pelo elemento $v = (1,2)$. Assim, a projeção ortogonal de u sobre S é dada por:

$$\widetilde{u} = P(u) = \frac{\langle u , v \rangle}{\langle v , v \rangle} v = \frac{3}{5}(1,2)$$

Portanto, a reflexão do elemento u sobre o subespaço S é dada por:

$$w = R(u) = 2\widetilde{u} - u = \frac{6}{5}(1,2) - (-1,2) = \frac{1}{5}(11,2) .$$

Note que $\| v \|_2 = \| w \|_2 = \sqrt{5}$.

Exemplo 5.16.4 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^2$ *munido do produto interno usual* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. *Seja* S *o subespaço de* $I\!R^2$ *dado por:* $S = \{(x,y) \in I\!R^2 \ / \ 2x - y = 0\}$ *e* $R : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ *o operador de reflexão sobre* S. *Determine o operador* $R(x,y)$.

Temos que o subespaço S é gerado pelo elemento $v = (1,2)$. Dado um elemento genérico $u = (x,y) \in I\!R^2$, temos que

$$\begin{aligned} R(x,y) \ = \ 2P(u) - (u) \ &= \ 2\frac{\langle\, u\,,\,v\,\rangle}{\langle\, v\,,\,v\,\rangle}v \ - \ u \\ &= \ \frac{2x \,+\, 4y}{5}(1,2) \ - \ (x,y) \\ &= \ \frac{1}{5}(-3x + 4y,\, 4x + 3y) \end{aligned}$$

Portanto, o operador R é definido por:

$$R(x,y) \ = \ \frac{1}{5}(-3x + 4y,\, 4x + 3y) \qquad \text{para todo} \qquad (x,y) \in I\!R^2 \,.$$

Facilmente obtemos a matriz $[R]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $I\!R^2$, que é dada por:

$$[R]_\beta^\beta \ = \ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 5.16.5 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^2$ *munido do produto interno usual* $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$. *Seja* S *o subespaço de* $I\!R^2$ *dado por:* $S = \{(x,y) \in I\!R^2 \ / \ y - ax = 0\}$ *para* $a \in I\!R$. *Seja* $R : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ *o operador de reflexão sobre* S, *paralelamente ao subespaço* $S^\perp$. *Determine a matriz do operador* R *com relação à base canônica do* $I\!R^2$.

Resposta: $\boxed{[R]_\beta^\beta \ = \ \dfrac{1}{1 + a^2}\begin{bmatrix} 1 - a^2 & 2a \\ 2a & a^2 - 1 \end{bmatrix}}$

Utilizando o resultado do Teorema 5.12.2 e o resultado do Teorema 5.14.3, temos que a matriz $[R]_\beta^\beta$ é simétrica e ortogonal. O que podemos verificar facilmente para a matriz $[R]_\beta^\beta$ do Exemplo 5.16.4 e para a matriz $[R]_\beta^\beta$ do Exemplo 5.16.5.

Exercícios

Exercício 5.70 *Considere o espaço vetorial* $I\!R^3$ *munido do produto interno usual* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Seja* S *o subespaço de* $I\!R^3$ *dado por:* $S = [(3,2,1)]$ *e* $R : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ *o operador de reflexão sobre* S. *Determine o operador* $R(x,y,z)$.

Exercício 5.71 *Seja* $R : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^3$ *o operador linear tal que* $R(x,y,z)$ *é a reflexão do elemento* $(x,y,z) \in I\!R^3$ *sobre o plano* $3x + 2y + z = 0$. *Pede–se:*

(a) Determine o operador $R(x,y,z)$.

(b) Determine o núcleo do operador R.

(c) Determine a imagem do operador R.

Exercício 5.72 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *com o produto interno*

$$\langle p , q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx \qquad \textit{para todo} \qquad p,\, q \in \mathcal{P}_3(I\!R)\,.$$

Determine a reflexão do elemento $q(x) = x^2$ *sobre o subespaço* $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

Resposta: $\boxed{R(q)(x) = -\dfrac{1}{3} + 2x - x^2}$

5.17 Melhor Aproximação em Subespaços

Teorema 5.17.1 (Melhor Aproximação) *Considere* V *um espaço vetorial com o produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* S *um subespaço de dimensão finita de* V*. Se* $u \in V$*, então a projeção ortogonal* $\widetilde{u} \in S$ *é a* ***melhor aproximação*** *do elemento* u *no subespaço* S *com relação à norma proveniente do produto interno, isto é,*

$$\| \, u - \widetilde{u} \, \|_2 \;\leq\; \| \, u - v \, \|_2 \qquad \textit{para todo} \qquad v \in S \, .$$

Demonstração – Pelo Teorema 5.9.1, sabemos que $u = \widetilde{u} - w$, onde $\widetilde{u} \in S$ e $w \in S^{\perp}$. Desse modo, para todo $v \in S$, temos que

$$u - v = (\, u - \widetilde{u} \,) + (\, \widetilde{u} - v \,)$$

desde que $(\, \widetilde{u} - v \,) \in S$ e $(\, u - \widetilde{u} \,) \in S^{\perp}$, que é a decomposição ortogonal do elemento $u - v$. Pelo Teorema de Pitágoras 5.5.3, temos que

$$\| \, u - v \, \|_2^2 = \| \, u - \widetilde{u} \, \|_2^2 + \| \, \widetilde{u} - v \, \|_2^2 \quad \Longrightarrow \quad \| \, u - \widetilde{u} \, \|_2^2 \leq \| \, u - v \, \|_2^2$$

Portanto

$$\| \, u - \widetilde{u} \, \|_2 \;\leq\; \| \, u - v \, \|_2 \qquad \text{para todo} \qquad v \in S \, ,$$

o que completa da demonstração. ■

Exemplo 5.17.1 *Considere o seguinte espaço vetorial real*

$$\mathcal{J}([0,\infty)) = \left\{ f : [0,+\infty) \longrightarrow I\!R \;\; \textit{função contínua} \;\; / \;\; \int_0^{\infty} \exp(-x) \, f^2(x) dx \; < \; +\infty \right\} .$$

Definimos em $\mathcal{J}([0,\infty))$ *o seguinte produto interno*

$$\langle \, f \, , \, g \, \rangle \;=\; \int_0^{\infty} \exp(-x) \, f(x) g(x) dx \, .$$

Dada a função $f(x) = \exp(-x)$*, determine o polinômio* $p(x) = a + b\,x$*,* $a, b \in I\!R$*, que melhor aproxima a função* f *com relação à norma Euclidiana.*

Resposta: $\boxed{p(x) \;=\; \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}x \quad , \quad x \;\geq\; 0}$

Exemplo 5.17.2 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([-1,1])$ *munido do produto interno usual. Determine o polinômio* $p(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, *mais próximo da função* $f(x) = \exp(x)$, $x \in [-1,1]$, *com relação à norma Euclidiana. Dê uma interpretação geométrica para o polinômio* $p(x)$.

Resposta: $\boxed{p(x) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) + \frac{3}{e}x \quad , \quad x \in [-1,1]}$

Exemplo 5.17.3 *Seja* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$. *Dados os elementos* $u, v \in V$ *ortogonais e um elemento qualquer* $w \in V$. *Considere a seguinte função*

$$J(\alpha, \beta) = \| w - (\alpha u + \beta v) \|_2^2 \qquad ; \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $\| \cdot \|_2$ *é a norma Euclidiana. Pede–se:*

(a) Determine o único ponto crítico, (α^*, β^*)*, da função* J.

(b) Dê uma interpretação geométrica para o elemento $w^* = \alpha^* u + \beta^* v$.

(c) Classifique o ponto crítico (α^*, β^*).

Vamos escrever a função J da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \langle w - (\alpha u + \beta v), w - (\alpha u + \beta v) \rangle \\ &= \langle w, w \rangle - 2 \langle w, \alpha u + \beta v \rangle + \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v \rangle \\ &= \langle w, w \rangle - 2\alpha \langle w, u \rangle - 2\beta \langle w, v \rangle + \alpha^2 \langle u, u \rangle + \beta^2 \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Como queremos encontrar os pontos críticos da função J, vamos calcular o seu gradiente

$$\nabla J(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -2 \langle w, u \rangle + 2\alpha \langle u, u \rangle \\ \\ -2 \langle w, v \rangle + 2\beta \langle v, v \rangle \end{bmatrix}$$

Finalmente, fazendo $\nabla J(\alpha, \beta) = (0, 0)$ obtemos

$$\alpha^* = \frac{\langle w, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \qquad \text{e} \qquad \beta^* = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

Portanto, temos que o elemento $w^* = \alpha^* u + \beta^* v$ é a projeção ortogonal do elemento w sobre o subespaço $S = [u, v]$. Pelo Teorema 5.17.1, podemos classificar o único ponto crítico (α^*, β^*) como sendo um ponto de mínimo da função J.

Exemplo 5.17.4 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(I\!R)$ *com o produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_0^1 p(x)q(x)dx \qquad ; \qquad \forall \;\, p,\, q \;\in\; \mathcal{P}_2(I\!R)\,.$$

Determine a melhor aproximação do polinômio $q(x) \,=\, 1 \,-\, x^2$ *no subespaço* $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

A melhor aproximação do elemento $q(x) \,=\, 1 \,-\, x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R) \subset \mathcal{P}_2(I\!R)$ é dada pela projeção ortogonal do elemento $q(x)$ sobre o subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$.

Inicialmente, vamos obter uma base ortogonal $\beta^* \,=\, \{\, q_1(x),\, q_2(x)\,\}$ para o subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$ a partir da base canônica $\beta \,=\, \{\, p_1(x) \,=\, 1,\, p_2(x) \,=\, x\,\}$, através do **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**.

Desse modo, escolhemos $q_1(x) \,=\, p_1(x) \,=\, 1$. Agora, vamos construir o elemento $q_2(x)$ da seguinte forma:

$$q_2(x) \;=\; p_2(x) \;-\; \alpha_{12}\, q_1(x)$$

ortogonal ao subespaço gerado pelo elemento $q_1(x)$. Assim, temos que

$$\alpha_{12} \;=\; \frac{\langle\, p_2 \,,\, q_1 \,\rangle}{\langle\, p_2 \,,\, q_1 \,\rangle} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Logo, o elemento $q_2(x) \;=\; x \,-\, \dfrac{1}{2}$, completando a base ortogonal $\beta^* \,=\, \{\, q_1(x),\, q_2(x)\,\}\,.$

Finalmente, vamos determinar a projeção ortogonal, $\widetilde{q}(x)$, do elemento $q(x) \,=\, 1 \,-\, x^2$ no subespaço $\mathcal{P}_1(I\!R)$ que é dada por:

$$\widetilde{q}(x) \;=\; \frac{\langle\, q \,,\, q_1 \,\rangle}{\langle\, q_1 \,,\, q_1 \,\rangle}\, q_1(x) \;+\; \frac{\langle\, q \,,\, q_2 \,\rangle}{\langle\, q_2 \,,\, q_2 \,\rangle}\, q_2(x)$$

onde

$$\langle\, q_1 \,,\, q_1 \,\rangle \;=\; \int_0^1 dx \;=\; 1 \qquad \text{e} \qquad \langle\, q_2 \,,\, q_2 \,\rangle \;=\; \int_0^1 \left(x \,-\, \frac{1}{2} \right)^2 dx \;=\; \frac{1}{12}$$

$$\langle\, q \,,\, q_1 \,\rangle \;=\; \int_0^1 (\, 1 \,-\, x^2\,)dx \;=\; \frac{2}{3}$$

$$\langle\, q \,,\, q_2 \,\rangle \;=\; \int_0^1 (\, 1 \,-\, x^2\,) \left(x \,-\, \frac{1}{2} \right) dx \;=\; -\frac{1}{12}$$

Portanto, temos que

$$\widetilde{q}(x) \;=\; \frac{2}{3} \;-\; \left(x \,-\, \frac{1}{2} \right) \;=\; \frac{7}{6} \;-\; x\,.$$

Exercícios

Exercício 5.73 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^4$ *munido do produto interno usual. Seja* S *o subespaço gerado pelos elementos* $q_1 = (1,1,1,1)$ *e* $q_2 = (-1,1,-1,1)$. *Encontre a melhor aproximação do elemento* $u = (2,1,3,1) \in I\!R^4$ *no subespaço* S.

Exercício 5.74 *Considere o espaço vetorial* $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ *com o produto interno usual*

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \qquad ; \qquad \forall\;\, f, g \,\in\, \mathcal{C}([-\pi,\pi])$$

e o subespaço vetorial

$$U \;=\; \{\; f \;\in\; \mathcal{C}([-\pi,\pi]) \;\;/\;\; f(-x) \;=\; f(x) \;\}\,.$$

Seja $\beta = \{\, 1, \cos(x), \cos(2x), \cdots, \cos(nx) \,\}$ *um conjunto ortogonal em* U. *Calcular a projeção ortogonal da função* $f(x) = |\, x \,|$, *pertencente ao subespaço* U, *sobre o subespaço de dimensão finita* S *gerado pelos elementos do conjunto ortogonal* β.

Exercício 5.75 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_3(I\!R)$ *com o produto interno*

$$\langle\, p \,,\, q \,\rangle \;=\; \int_{0}^{1} p(x)q(x)dx \qquad \textit{para todos} \qquad p,\, q \,\in\, \mathcal{P}_3(I\!R)\,.$$

Determine a melhor aproximação do elemento $q(x) = x^3$ *no subespaço* $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

Exercício 5.76 *Sejam* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $\langle\, \cdot \,,\, \cdot \,\rangle$, S *um subespaço de dimensão finita com* $\beta = \{\, q_1, \cdots, q_n \,\}$ *uma base ortonormal para* S. *Dado um elemento* $u \in V$, *considere a função* $J : V \longrightarrow I\!R$ *definida por:*

$$J(v) \;=\; \|\, u \,-\, v \,\|_2^2 \qquad ; \qquad v \,\in\, S\,,$$

onde $\|\cdot\|_2$ *é a norma Euclidiana. Mostre que o elemento* $v^* \in S$ *satisfazendo*

$$J(v^*) \;=\; \min\{\; J(v) \quad ; \quad v \,\in\, S \;\}$$

é a ***projeção ortogonal*** *do elemento* u *sobre o subespaço* S.

Exercício 5.77 *Considere o espaço vetorial real* $I\!R^3$ *munido do produto interno usual. Seja* S *o subespaço definido por:*

$$S \;=\; \{\; (x,y,z) \;\in\; I\!R^3 \;\;/\;\; x \,+\, y \,-\, z \,=\, 0 \;\}\,.$$

Determine a melhor aproximação do elemento $v = (1,2,1)$ *no subespaço* $S^{\perp}$.

Bibliografia

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, 1977.

[2] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume I, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[3] Tom M. Apostol, *Calculus*, Volume II, Second Edition, John Wiley & Sons, 1976.

[4] Tom M. Apostol, *Linear Algebra–A First Course with Applications to Differential Equations*, John Wiley & Sons, 1997.

[5] Alexander Basilevsky, *Applied Matrix Algebra in the Statistical Sciences*, Dover, 1983.

[6] J. L. Boldrini, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Editora Harbra Ltda, 1986.

[7] C. A. Callioli, H. H. Domingues e R. C. F. Costa, *Álgebra Linear e Aplicações*, Sexta Edição, Atual Editora, 2003.

[8] R. Charnet, C. A. L. Freire, E. M. R. Charnet e H. Bonvino, *Análise de Modelos de Regressão Linear com Aplicações*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, 2008.

[9] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, *Um Curso de Álgebra Linear*, edusp, 2001.

[10] S. H. Friedberg, A. J. Insel and L. E. Spence, *Linear Algebra*, Prentice– Hall, Third Edition, 1997.

[11] Gene H. Golub & Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Third Edition, John Hopkins, 1996.

[12] K. Hoffman e R. Kunze, *Álgebra Linear*, Editora da USP, 1971.

[13] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1996.

[14] Bernard Kolman e David R. Hill, *Introdução à Álgebra Lienar com Aplicações*, LTC, Oitava Edição, 2006.

[15] Serge Lang, *Introduction to Linear Algebra*, Second Edition, Springer, 1986.

[16] Elon L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1996.

[17] Elon L. Lima, *Curso de Análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1996.

[18] Seymour Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira Edição, Makron Books, 1994.

[19] Luenberger, D. D. (1973), *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley.

[20] Patricia R. de Peláez, Rosa F. Arbeláez y Luz E. M. Sierra, *Algebra Lineal con Aplicaciones*, Universidad Nacional de Colombia, 1997.

[21] Gilbert Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Third Edition, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1988.

[22] David S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley & Sons, 1991.