

3a. Lista

1. Problema 2 – § 3.2 [Evans].

2. Problema 3 – § 3.2 [Evans].

3. Resolva $\sum_{k=1}^n x_k u_{x_k} = \alpha u$ ($\alpha = \text{constante} \neq 0$)
com $u(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = \Phi(x_1, \dots, x_{n-1})$ [F.John].

4. Considere a equação de Burgers $u_t + uu_x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, com a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. Calcule as características. Suponha que $u_0 \in C^\infty$, $u_0(x) = 1$ se $x \leq 0$, $u_0(x) = 0$ se $x \geq 1$ e $u'_0 \leq 0$. Esboce as curvas características no plano (x, t) . O que ocorre com a solução em $t = 1$?

5. Mostre que a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + a(u)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

onde $a \in C^1(\mathbb{R})$ é dada implicitamente pela equação $u = u_0(x - a(u)t)$.

6. Resolva [F.John]

a) $u_x + u_y = u^2$, $u(x, 0) = h(x)$

b) $u_y = xu u_x$, $u(x, 0) = x$ (Resp.: $u e^{-yu} = x$)

c) $xu_x + yu_y + u_z = u$, $u(x, y, 0) = h(x, y)$

d) $xu_y - yu_x = u$, $u(x, 0) = h(x)$ (Resp.: $u = h(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{\arctg(y/x)}$).

7. Resolva [F.John]

a) $u_y = u_x^3$, $u(x, 0) = 2x^{2/3}$ (Resp.: $u = 2x^{3/2}(1 - 27y)^{-1/2}$)

b) $u = xu_x + yu_y + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$, $u(x, 0) = \frac{1}{2}(1 - x^2)$.

8. Para a equação de Hamilton-Jacobi,

$$u_t + H(x, \nabla u) = 0, \quad H = H(x, p), \quad x, p \in \mathbb{R}^n,$$

mostre que as curvas características são dadas por

$$\frac{dx_i}{dt} = H_{p_i}, \quad \frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i H_{p_i} - H, \quad \frac{dp_i}{dt} = -H_{x_i}.$$

9. Prove o teorema de existência e unicidade local para EDPs lineares de primeira ordem.

10. Seja $f = \chi_{(-a,a)}$ ($a > 0$). Calcule $\hat{f}$ e $\check{f}$.

11. Sejam T uma transformação linear invertível do $\mathbb{R}^n$, $S = (T^t)^{-1}$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $(f \circ T)^\wedge = |\det T|^{-1} \hat{f} \circ S$. Escreva esta fórmula nos casos particulares em que T seja uma transformação ortogonal e $Tx = a^{-1}x$ ($a \neq 0$).

12. Calcule $K(t)^\wedge$, onde $K(t) \equiv K(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ é o núcleo do calor em $\mathbb{R}^n$.

13. Usando a transformada de Fourier em $\mathbb{R}^{n-1}$, descubra (formalmente) o núcleo de Poisson para o $\mathbb{R}_+^n$, i.e. a função $K(x, y)$ ($x \in \mathbb{R}_+^n = \{(\bar{x}, x_n); \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$) tal que a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^n \\ u|_{\mathbb{R}^{n-1}} = g & (\mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{R}_+^n) \end{cases}$$

seja dada por $K(x_n) * g$ ($K(x_n) \equiv K(\bar{x}, x_n)$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $K(x_n) * g = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(\bar{x} - y, x_n) g(y) dy$).

(Sugestões: i) $\Delta u = u_{x_n x_n} + \Delta_{\bar{x}} u$; ii) $e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{\pi s}} e^{-\beta^2/4s} ds$ ($\beta > 0$) (não precisa provar esta fórmula); iii) $(\varphi_a)^\wedge(\xi) = a^{-n} e^{-\pi|\xi|^2/a^2}$, $\varphi_a(x) = e^{-\pi a^2|x|^2}$ ($a > 0$).)

14. [Zachmanoglou] Encontre os termos de ordem menor do que ou igual a dois da solução em série de potências $u = \sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha}$ para os problemas:

a) $u_t = u^2 + u_x, \quad u(0, x) = 1 + 2x$

b) $u_t = u_x^2, \quad u(0, x) = 1 + 2x - 3x^2$

c) $u_t = (\sin u)u_x, \quad u(0, x) = \frac{\pi}{6} + x$

d) $u_t = e^{tx} u_x, \quad u(0, x) = 1 - x - x^2$

e) $u_t = u_{x_1} u_{x_2}, \quad u(0, x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2x_1^2$

f) $u_t = u^2 + u_{x_2} u_{x_3}, \quad u(0, x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_2^2 - x_3^2 + x_2 x_3.$

15. [Zachmanoglou] Considere o problema de valor inicial para a lei de conservação

$$\begin{aligned} a(u)u_x + u_y &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

Suponha que $a(u)$ e $f(x)$ sejam funções reais analíticas de uma variável real. Deduza a solução em série

$$u(x, y) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ [a(f(x))]^n \frac{df(x)}{dx} \right\} y^n$$

a qual é válida para $|y|$ suficientemente pequeno.

(*Sugestão:* Comece com a expansão em série

$$u(x, y) = b_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(x)}{n!} y^n$$

onde $b_n(x) = \frac{\partial^n u(x, y)}{\partial y^n} \Big|_{y=0}$. Use indução para provar que para $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = (-1)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [a(u)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\} .)$$

16. [Zachmanoglou] Suponha que os coeficientes a e c da equação

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0$$

se anulam num ponto (x_0, y_0) . Mostre que nas novas coordenadas $\xi = x + y$ e $\eta = x - y$ os coeficientes de $u_{\xi\xi}$ e $u_{\eta\eta}$ não se anulam em (x_0, y_0) .

17. [Zachmanoglou] Descreva as regiões no plano (x, y) onde a equação é hiperbólica, parabólica ou elíptica:

- a) $2u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} - u = 0$
- b) $u_{xx} + 2xu_{xy} + u_{yy} + \sin(xy)u = 5$
- c) $yu_{xx} - 2u_{xy} + e^x u_{yy} + x^2 u_x - u = 0$.

18. [Zachmanoglou] Mostre que por uma mudança de variáveis, nas variáveis independentes e dependente, toda equação de segunda ordem elíptica com coeficientes constantes pode ser transformada na forma canônica

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} + \lambda v = 0$$

onde λ é uma constante adequada.

(*Sugestão:* Na equação

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + Cu = D$$

com $D = 0$, faça a substituição $v = u \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{B_i \xi_i}{2} \right)$.)

19.

- a) Considere a equação de segunda ordem a duas variáveis

$$(*) \quad au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = g(x, y, u, u_x, u_y)$$

com (x, y) num aberto Ω do $\mathbb{R}^2$. Supomos que os coeficientes $a, b, c \in C^1(\Omega)$ e que $a(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$. Prove que se $(*)$ é parabólica (em Ω) então existe uma mudança de coordenadas local $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ tal que $B(\nabla \xi, \nabla \xi) = 0$, onde B é a forma bilinear associada a $(*)$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Conclua que toda equação (*) parabólica pode ser transformada (localmente) na forma canônica $u_{\eta\eta} = \tilde{g}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$. (*Observação:* Vale resultados análogos para os casos hiperbólico (visto em aula) e elíptico. No caso elíptico a prova é mais complicada (e.g. [Garabedian]); cf. item **c)** abaixo.

- b)** Construa mudança de coordenadas explícitas para as equações abaixo que as transformem (localmente) em formas canônicas; exiba as formas canônicas correspondentes.

i) $u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad y < 0$

ii) $u_{xx} + xu_{yy} = 0, \quad x > 0$ (*equação de Tricomi*)

iii) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u + 2u_y, \quad y < 0$

- c)** Suponha que (*) (item **a)**) é elíptica (em Ω). Seja $z = \xi + i\eta$ uma solução da EDP complexa $z_x + \mu z_y = 0$, onde $\mu := b/a + i\sqrt{ac - b^2}/a$. Mostre que $B(\nabla\xi, \nabla\eta) = 0$, onde B é a forma quadrática definida no item **a)**. (*Sugestão:* $az_x^2 - 2bz_xz_y + cz_y^2 = 0$.) (*Observação:* A equação $z_x + \mu z_y = 0$ é equivalente ao sistema (verifique)

$$\begin{cases} \eta_x = -(b\xi_x + c\xi_y)/W \\ \eta_y = (a\xi_x + b\xi_y)/W \end{cases}$$

onde $W = \sqrt{ac - b^2}$, ou, eliminando η , à equação

$$\left(\frac{a\xi_x + b\xi_y}{W} \right)_x + \left(\frac{b\xi_x + c\xi_y}{W} \right)_y = 0$$

conhecida como equação de Beltrami.)

- 20.** Defina $\Delta = b^2 - ac$ como sendo o *discriminante* da equação (*) (v. Exerc. 19.a). Mostre que o sinal de Δ é invariante por mudança de coordenadas.

21.

- a)** Note que uma curva (suave) $(x(s), y(s))$ é característica para (*) (Exerc. 19.a)) sse $a(y')^2 - 2bx'y' + c(x')^2 = 0$.

- b) Mostre que uma curva $\mathcal{C}$ é uma curva não-característica para $(*)$ e u , u_x e u_y são dados ao longo de $\mathcal{C}$ então os valores de u_{xx} , u_{xy} e u_{yy} são unicamente determinados ao longo de $\mathcal{C}$.

22. Considere o operador ∂_x no plano (x, y) (i.e. no $\mathbb{R}^2$).

- a) Encontre as curvas características de ∂_x ;
b) Seja $\mathcal{C} : x = \Phi(y)$, $y \in \mathbb{R}$, $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, uma curva não-característica. Resolva o problema

$$\begin{cases} \partial_x u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u|_{\mathcal{C}} = g, & (g \in C^1); \end{cases}$$

- c) Discuta a existência e unicidade de solução do problema

$$\begin{cases} \partial_x u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

- d) Verifique que as soluções da equação $\partial_x u = f(x, y)$ ($f \in C^0(\mathbb{R}^2)$) são dadas por integrais de f ao longo de curvas características de ∂_x .

23. [Evans] Use separação de variáveis para encontrar uma solução $u = u(r, \theta)$ em série de Fourier do problema de valor de contorno

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \Theta) = 0 \\ u(1, \theta) = g_1(\theta), \quad u(2, \theta) = g_2(\theta) \end{cases}$$

para $1 < r < 2$, $0 < \theta < \Theta < 2\pi$. Suponha que g_1 e g_2 são funções suaves.

24. [Evans] Use separação de variáveis para encontrar uma solução $u = u(x_1, x_2, t)$ em série de Fourier do problema de valor inicial e de contorno

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_1x_1t} + u_{x_2x_2t}, & \text{em } \Omega_T \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \times [0, T] \\ u = g, \quad u_t = h, & \text{em } \Omega \times t = 0 \end{cases}$$

onde Ω é o quadrado $\{(x_1, x_2); 0 < x_1, x_2 < 1\}$.

25. [Evans] Prove que se u é a solução da equação de Schrödinger

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

dada pela fórmula

$$u(x, t) = (4\pi it)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} g(y) dy,$$

então $\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-n/2} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ para todo $t \neq 0$.