MA 419 - Topologia Geral
Lista de Exercícios II

1. Seja Y subespaço topológico de X e $\emptyset \neq Z \subset Y$. Demonstre que Z é compacto como subespaço de Z se e seomente se Z é compacto como subespaço de X.

2. Seja X espaço compacto e Y sub-espaço também compacto. Mostre através de contra exemplo que Y não é necessariamente fechado em X.

3. Seja X compacto e $f : X \to \mathbb{K}$ compacto, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mostre que f é limitada e que existem $a, b \in X$ tais que $|f(a)| \leq |f(x)| \leq |f(b)|$, qualquer que seja $x \in X$.

4. Seja X o plano com a métrica da rede ferroviária francesa. Mostre que X não é compacto.

5. Determine quais dos espaços abaixo são compactos. Justifique as respostas.

   (a) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

   (b) $S^n \setminus \{polo\ norte\}$;

   (c) O toro do qual retiramos um disco aberto.

6. Mostre que a intersecção de dois compactos não é necessariamente compacto. Mostre que a intersecção de uma família qualquer de compactos fechados é compacto.

7. Mostre que $[0,1) \times [0,1)$ é homeomorfo a $[0,1] \times [0,1)$.

8. Uma vizinhança compacta de $x \in X$ é um compacto $V \subset X$ tal que $x \in int(V)$. Um espaço topológico é dito localmente compacto se todo ponto possuir vizinhança compacta. Seja Xe spaço Hausdorff e $Y \subset X$ um subconjunto denso e localmente compacto. Mostre que Y é aberto

9. Seja $S_{()} \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq ...$ uma sequência encaixante de fechados em $\mathbb{R}^n$ com $\lim_{n\to\infty} diam(S_n) = 0$. Mostre que $\cap_n S_n$ é um conjunto com um único ponto.

10. Sejam$A, B \subset X$, com A compacto e B fechado e $A \cap B \neq \emptyset$. Moste que $\inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\} > 0$.

11. Considere a aplicação diagonal $\Delta : X \to X \times X$, definida por $\Delta(x) = (x,x)$. Mostre que X é Hausdorff se e somente se $\Delta(X)$ é fechado em $X \times X$.

12. Dada famílía $\{(X_n, d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de espaços métricos, mostre que

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_z)}{(1 + d_n(x_n, y_z))}$$

    define em $\prod X_n$ uma métrica que induz a topologia produto.

13. *Espaço de Helly:* Seja H o conjunto de todas as funções não decrescentes $f : I_{\mathbb{Q}} \to I_{\mathbb{Q}}$ ($I_{\mathbb{Q}}$ é o conjunto dos racionais entre 0 e 1). Considere H como subespaço de $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$ (topologia produto).

    (a) Mostre que H é compacto Hausdorff.

    (b) Mostre que H satisfaaz o primeiro axioma da enumerabilidade e é sequencialmente compacto.

    (c) Mostre que H é separável.

    (d) Seja $f_t(x) = 0$ se $x < t, = 1/2$ se $x = t$ e $= 1$ se $x > t$. Considere a famílía $A = \{f_t | t \in \mathbb{R}\}$ e mostre que esta famílía é não enumerável mas não possui ponto de acumulação em H. Conclua que H não é metrizável.

14. Seja X espaço métrico, $\mathcal{C}$ o espaço das funções (reais) contínuas em X. Considere em $\mathcal{C}$ a topologia da convergência uniforme sobre compactos: dada sequência $f_n : X \to \mathbb{R}$, dizemos que $f_n \to f$ se, dado $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ compacto, existe N tal que, para qualquer $x \in K$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ se $n > N$. Considere a função $i : X \to \mathcal{C}$ definida por $i(x)(y) := d_x(y) = d(x,y)$.

    (a) Mostre que i é contínua e injetora.

    (b) Mostre que $i(X)$ é fechado em $\mathcal{C}$ se X for compacto.