Exemplos - Dependência Linear

Exemplo 1: *O conjunto* $\{(1,0),(0,1)\}$ *em* $\mathbb{R}^2$ *é Linearmente Independente.*

De fato, a equação:

$$\alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$

só vale para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Assim, os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ são L.I.

Exemplo 2: *Os elementos* $v_1 = (1,2)$ *e* $v_2 = (3,6)$ *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$ *são Linearmente Dependentes.*

De fato, temos que a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = e \Rightarrow \alpha_1(1,2) + \alpha_2(3,6) = (0,0)$$

É verdadeira para $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = -1$. Assim, v_1 e v_2 são L.D.
Também podemos verificar que $(3,6) = 3(1,2) \Rightarrow v_2 = 3v_1$, ou seja, v_2 é combinação linear de v_1.

Geometricamente, quando dois elementos em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ são Linearmente Dependentes, eles estão na mesma reta, quando colocados na mesma origem.

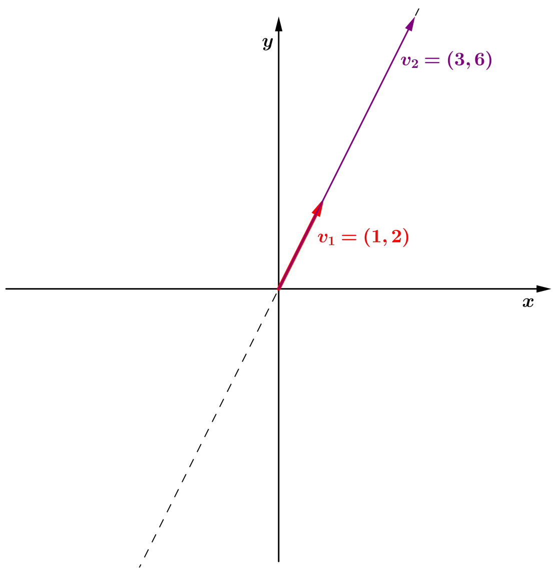

Figura 1: Os vetores v_1 e v_2 são L.D.

Exemplo 3: *Os elementos* $v_1 = (1,2)$ *e* $v_2 = (4,3)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *são Linearmente Independentes.*

De fato, a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = e \Rightarrow \alpha_1(1,2) + \alpha_2(4,3) = (0,0)$$

Vale apenas para $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Geometricamente, quando dois elementos em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ são L.I., eles não estão na mesma reta, quando colocados na mesma origem.

Exemplo 4: *O conjunto* $\{(1,1,1),(1,2,1),(3,2,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ *é Linearmente Independente.*

Tome a equação:

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,2,1) + \alpha_3(3,2,-1) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

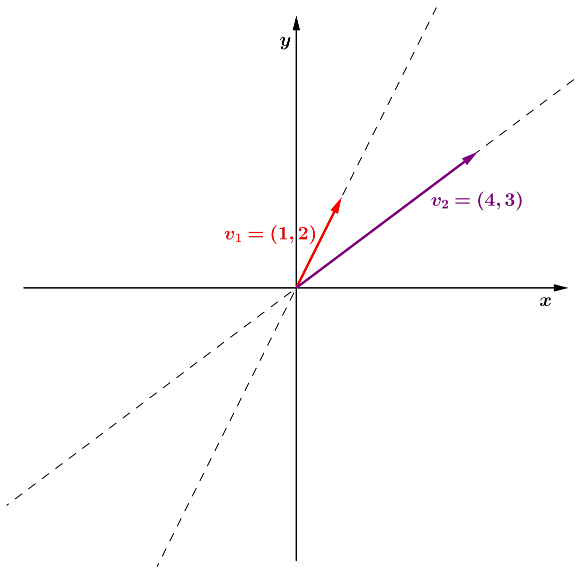

Figura 2: Os vetores v_1 e v_2 são L.I.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 & = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{escalonamento} \left\{ \begin{array}{rl} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & = 0 \\ -4\alpha_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Este sistema tem como única solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
Assim, $\{(1,1,1), (1,2,1), (3,2,-1)\}$ é L.I.

Exemplo 5: *Os elementos* $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (-2,-2,1)$ *e* $v_3 = (-3,-1,4)$ *de* $\mathbb{R}^3$ *são Linearmente Dependentes.*

Tome a equação:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = e \Rightarrow \alpha_1(1,3,2) + \alpha_2(-2,-2,1) + \alpha_3(-3,-1,4) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 & = 0 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 & = 0 \end{array} \right. \xrightarrow{escalonamento} \left\{ \begin{array}{rl} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 & = 0 \\ 20\alpha_2 + 40\alpha_3 & = 0 \\ 0\alpha_2 + 0\alpha_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Obtemos um sistema linear que tem como solução: $\alpha_2 = -2\alpha_3$, $\alpha_1 = -\alpha_3$ com $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ livre. Assim, para algum $\alpha_3 \neq 0$ a equação vale, portanto $v_1 = (1,3,2)$, $v_2 = (-2,-2,1)$ e $v_3 = (-3,-1,4)$ são L.D.

De fato, podemos ver que o vetor $v_3 = (-3,-1,4)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (1,3,2)$ e $v_2 = (-2,-2,1)$, uma vez que: $(-3,-1,4) = (1,3,2) + 2(-2,-2,1) \Rightarrow v_3 = v_1 + 2v_2$.

Geometricamente, se três vetores em $\mathbb{R}^3$ são Linearmente Dependentes, eles estão no mesmo plano, quando colocados na mesma origem.

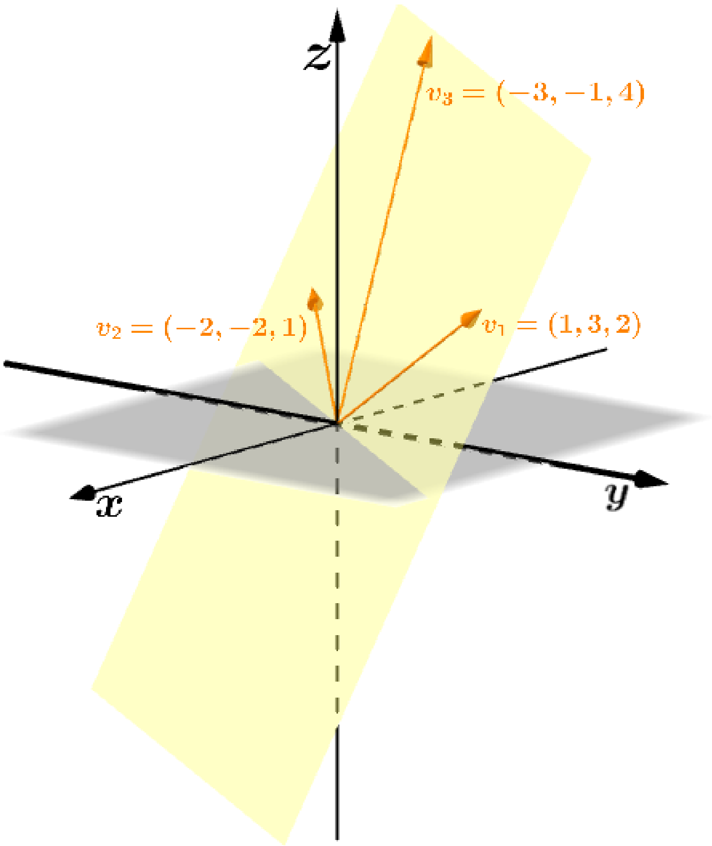

Figura 3: Os vetores v_1, v_2 e v_3 são L.D.

Exemplo 6: *Os polinômios* $1, x, x^2, x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ *são Linearmente Independentes.*

De fato, temos que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$$

só vale se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

Exemplo 7: *O subconjunto* $\{2x, x^2+1, x+1, x^2-1\}$ *de* $P_2(\mathbb{R})$ *é Linearmente Dependente.*

Tomando a equação:

$$\alpha_1 2x + \alpha_2(x^2+1) + \alpha_3(x+1) + \alpha_4(x^2-1) = 0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) + (2\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_4)x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

Dois polinômios são iguais se os coeficientes de cada termo é igual, assim temos:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 & = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

Que é um sistema linear homogêneo com três equações e quatro incógnitas, ou seja, admite mais de uma solução além da trivial. Assim, podemos afirmar que o conjunto $\{2x, x^2+1, x+1, x^2-1\}$ é L.D.

Exemplo 8: *As matrizes* $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *pertencentes a* $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *são Linearmente Independentes.*

De fato, tomando a equação:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & = 0 \\ \alpha_4 & = 0 \\ 2\alpha_3 & = 0 \quad \Rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 0 \\ -\alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

Do qual obtemos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Assim, as matrizes M_1, M_2, M_3 e M_4 são L.I.

Exemplo 9: *Determinar c para que o conjunto* $\{(3, 5c, 1), (2, 0, 4), (1, c, 3)\}$ *seja Linearmente Independente.*

Tomando a equação:

$$\alpha_1(3, 5c, 1) + \alpha_2(2, 0, 4) + \alpha_3(1, c, 3) = (0, 0, 0)$$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 5c\alpha_1 + c\alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

Para que o conjunto seja linearmente independente, temos que ter $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, ou seja, o sistema linear homogêneo acima deve admitir somente a solução trivial. Mas para isso, basta que a matriz do sistema tenha determinante diferente de 0. Isto é:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5c & 0 & c \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2c + 20c - 30c - 12c \neq 0 \Rightarrow -20c \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$$

Assim, para algum $c \neq 0$ o conjunto $\{(3, 5c, 1), (2, 0, 4), (1, c, 3)\}$ é L.I. e para $c = 0$ temos que o conjunto é L.D.

Exemplo 10: *O subconjunto* $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 4)\}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *é Linearmente Dependente.*

De fato, temos que:

$$0(1, 1, 0, 0) + 2(0, 1, 0, 2) - (0, 0, 1, 0) = (0, 2, -1, 4)$$

Ou seja, um dos vetores é combinação linear dos demais, assim o subconjunto é L.D.

Considere o subespaço $S = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 4)]$ de $\mathbb{R}^4$. Como já vimos, um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais. Pela propriedade (P7) podemos extraí-lo do conjunto de geradores e temos:

$$S = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)]$$

Ou seja, os três vetores restantes ainda geram S.