



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



João Vitor Navarro Viana

Estudo numérico das reflexões na propagação de onda unidimensional e bidimensional.

Campinas
27/04/2026

João Vitor Navarro Viana

Estudo numérico das reflexões na propagação de onda unidimensional e bidimensional.

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Universidade
Estadual de Campinas como parte dos requisitos para
obtenção de créditos na disciplina Projeto de Ex-
tensão Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof.
Maria Amélia Novais Schleicher.

Resumo

Este trabalho apresenta o estudo e a implementação numérica da equação da onda em domínios unidimensionais e bidimensionais utilizando o método das Diferenças Finitas (DF). O foco principal da pesquisa consistiu na mitigação de reflexões artificiais nas fronteiras do domínio computacional, um problema recorrente em simulações numéricas. Para o cenário 1D, foram aplicadas condições de contorno absorventes (ABC), enquanto para o cenário 2D, implementou-se a técnica de *Perfectly Matched Layer* (PML). Os resultados demonstraram que o método foi capaz de simular a propagação de ondas sem reflexões artificiais. Conclui-se que a metodologia adotada garantiu a estabilidade e a precisão necessárias para representar a propagação de ondas em um domínio finito de forma precisa.

Abstract

This work presents the study and numerical implementation of the wave equation in one- and two-dimensional domains using the Finite Difference (FD) method. The main focus of the research was the mitigation of artificial reflections at the boundaries of the computational domain, a recurring issue in numerical simulations. For the 1D scenario, Absorbing Boundary Conditions (ABCs) were applied, while for the 2D scenario, the Perfectly Matched Layer (PML) technique was implemented. The results demonstrated that the method was capable of simulating wave propagation without artificial reflections. It is concluded that the adopted methodology provided the stability and accuracy required to represent wave propagation in a finite domain with high fidelity.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Teoria	7
2.1	Diferenças Finitas	7
2.1.1	Discretização do Modelo Unidimensional (1D)	7
2.1.2	Discretização do Modelo Bidimensional (2D)	10
2.2	Condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)	13
2.2.1	CFL no Modelo Unidimensional (1D)	13
2.2.2	CFL no Modelo Bidimensional (2D)	14
2.2.3	Dispersão Numérica e Escolha da Malha	14
2.3	Condições de Fronteira Absorventes	15
2.3.1	Caso Unidimensional (1D)	16
2.3.2	Extensão das Condições ABC do caso unidimensional para o cenário bidimensional	18
2.3.3	Caso 2D (Formulação da Camada Perfeitamente Casada Discreta) .	21
2.4	Análise de reflexões.	25
2.4.1	Parcialmente Transmissivo	26
2.4.2	Mudança de Meio 1D	26
2.4.3	Mudança de Meio 2D	28
3	Conclusão	29
A	Apêndice	31
A.1	Diferenças finitas	31

1 Introdução

Uma onda pode ser entendida como uma perturbação que se propaga no espaço, transportando energia, mas não matéria. Como descrito por Nussenzveig, “uma onda é qualquer efeito (perturbação) que se transmite de um ponto a outro de um meio. Em geral, fala-se de onda quando a transmissão do efeito entre dois pontos distantes ocorre sem que haja transporte direto de matéria de um desses pontos ao outro” (Nussenzveig [2002]).

As ondas são classificadas em mecânicas e eletromagnéticas. As ondas mecânicas são aquelas que necessitam de um meio material para se propagar, como as ondas sonoras, que dependem do ar. Já as ondas eletromagnéticas não necessitam de um meio material, podendo se propagar no vácuo, como a luz.

Elas possuem aplicações em diversas áreas. Na geofísica, são utilizadas no estudo da superfície para prospecção de petróleo, enquanto na área da saúde são empregadas em exames como raios X e ultrassom.

As ondas também podem ser classificadas quanto às direções em que se propagam. O caso unidimensional (1D) pode ser ilustrado pela propagação de um pulso ao longo de uma corda tensionada, como a de um violão. Em contrapartida, a propagação bidimensional (2D) ocorre em superfícies planas, como as ondas concêntricas geradas quando uma pedra atinge um lago.

Neste trabalho, o objetivo é estudar a propagação de ondas utilizando o método das diferenças finitas. O estudo inicia-se no caso unidimensional, abordando condições de fronteira absorventes (ABC) e a análise de fenômenos como reflexão, transmissão e conservação de energia. Em seguida, o modelo é expandido para o domínio bidimensional.

Do ponto de vista matemático, a propagação de onda pode ser descrita por equações diferenciais parciais. A equação da onda unidimensional é dada por:

$$u_{xx} = \frac{1}{c(x)^2} u_{tt}, \quad (1)$$

onde $u = u(x, t)$ representa a amplitude da onda em função da posição x e do tempo t , e $c(x)$ denota a velocidade de propagação na posição x .

A propagação da onda no domínio bidimensional é descrita por:

$$u_{xx} + u_{zz} = \frac{1}{c(x, z)^2} u_{tt}, \quad (2)$$

onde $u = u(x, z, t)$ representa a amplitude da onda em função das coordenadas espaciais x e z e do tempo t , enquanto $c(x, z)$ denota a velocidade de propagação na posição (x, z) .

2 Teoria

Para encontrar soluções para a equação da onda em meios com velocidades variando, usamos métodos numéricos. Neste trabalho iremos utilizar o método de diferenças finitas.

2.1 Diferenças Finitas

O método das Diferenças Finitas (DF) consiste em substituir na equação as derivadas por aproximações das derivadas. Para obtermos estas aproximações, usamos expansões em Série de Taylor (veja apêndice).

2.1.1 Discretização do Modelo Unidimensional (1D)

Para o caso de uma dimensão espacial, aproximamos as derivadas parciais usando o método das diferenças centrais:

$$u_{xx}(x_i, t_k) \approx \frac{u(x_{i+1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x^2}, \quad (3)$$

onde $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ e $x_{i-1} = x_i - \Delta x$. Analogamente, para a derivada temporal:

$$u_{tt}(x_i, t_k) \approx \frac{u(x_i, t_{k+1}) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i, t_{k-1}))}{\Delta t^2}. \quad (4)$$

Para simplificar a escrita, adotamos a notação $u(x_i, t_k) = u_i^k$. Substituindo as aproximações na equação da onda (1), temos:

$$\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} = \frac{1}{c_i^2} \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (5)$$

onde $c_i = c(x_i)$. Isolando o termo de tempo futuro u_i^{k+1} , obtemos o esquema numérico explícito para a propagação unidimensional:

$$u_i^{k+1} = \left(\frac{c_i \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + 2u_i^k - u_i^{k-1}. \quad (6)$$

Este esquema permite aproximar a solução da equação da onda utilizando o passo de tempo atual (u_i^k) e o passo anterior (u_i^{k-1}) na posição x_i . Para $t = 0$, assume-se uma condição inicial $u_i^{-1} = u_i^0$.

Dessa forma, com uma condição inicial dada na Figura 1(a), podemos aproximar a solução da onda para alguns tempos, como visto na Figura 1.

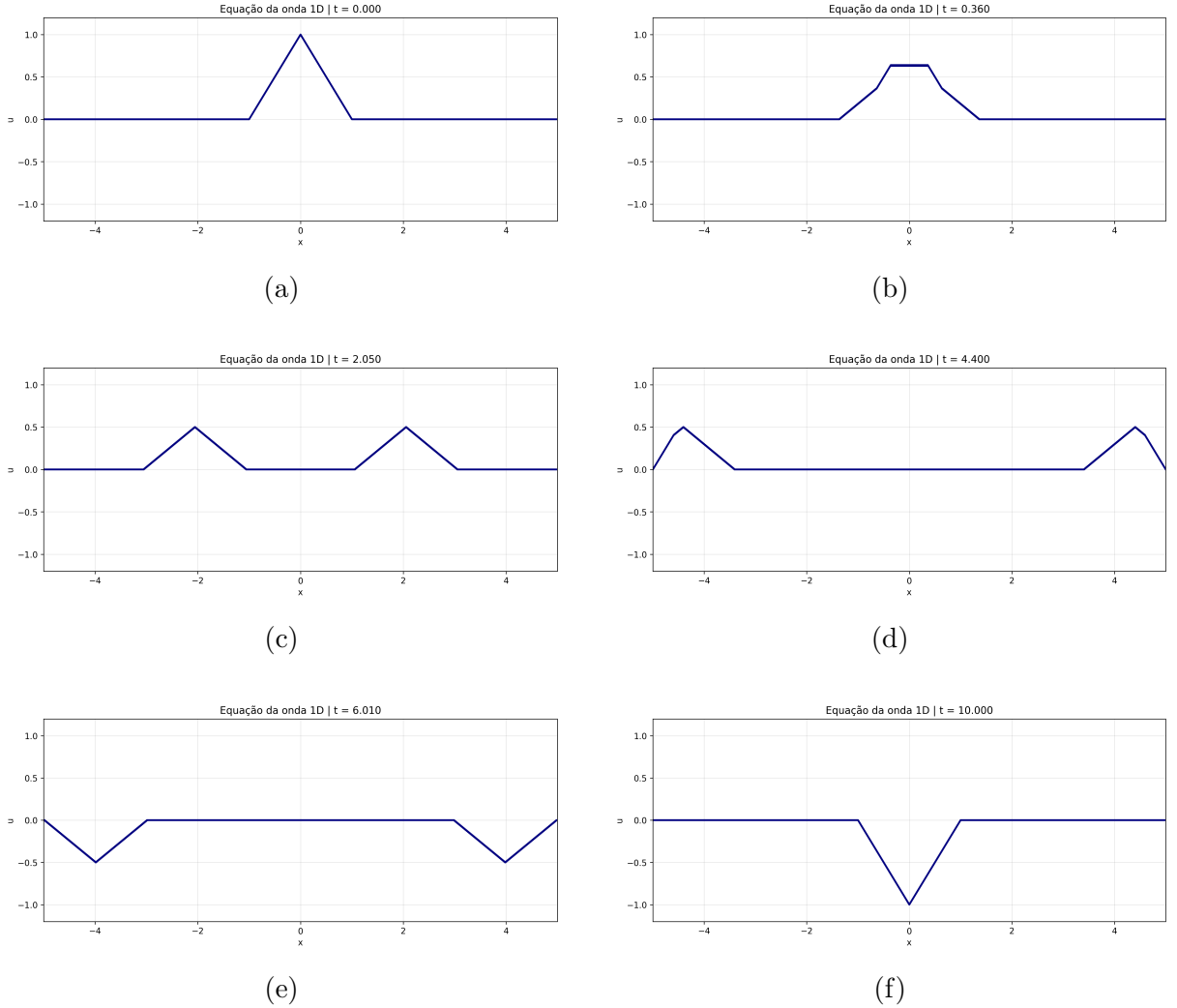


Figura 1: Simulação de onda unidimensional, para tempo: (a) $t = 0.000s$; (b) $t = 0.360s$; (c) $t = 2.050s$; (d) $t = 4.400s$; (e) $t = 6.010s$; (f) $t = 7.920s$.

A fim de validar a simulação numérica, podemos avaliar a onda em cada ins-

tante de tempo t comparando os resultados do código com a solução analítica exata dada pela fórmula de d'Alembert. A solução para equação (1) com dado inicial $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e $u_t(x, 0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ é:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (7)$$

Aqui vamos considerar que a velocidade inicial é nula ($g(s) = 0$), o que cancela o termo da integral. Também definimos a velocidade de propagação como $c = 1$. Logo, a equação se simplifica diretamente para:

$$u(x, t) = \frac{f(x - t) + f(x + t)}{2}, \quad (8)$$

com essa equação podemos concluir que teremos a condição inicial se dividindo em duas ondas que caminham em direções opostas.

Tomando como condição inicial $f(x)$ (veja Figura 1(a)):

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (9)$$

Usando a solução de d'Alembert iremos fazer uma análise da nossa solução numérica para alguns instantes de tempo, t .

- (a) $t = 0.000s$: Neste tempo, a solução é a própria $f(x)$, ou seja, a condição inicial.
- (b) $t = 0.360s$: Conforme o esperado, as ondas começam a se dividir à medida que se propagam em direções opostas, porém ainda há superposição das duas ondas (Figura 1(b)).
- (c) $t = 2.050s$: Podemos ver que a onda se dividiu e a solução é exatamente o que é esperado da solução analítica (Figura 1(c)).
- (d) $t = 4.400s$: As frentes de onda apresentam anomalias devido ao domínio computacional limitado e começam a sofrer reflexões indesejadas (Figura 1 (d)).

- (e) $t = 6.010s$: As ondas têm sua fase invertida pela reflexão causada pelas bordas. Observe que, se não tivéssemos a fronteira numérica essas ondas não teriam reflexão.
- (f) $t = 7.920s$: As ondas invertidas se encontram sofrendo interferência construtiva e formam a condição inicial ($f(x)$) invertida, dando início a um processo cíclico, onde a condição inicial refletida se divide em duas frentes de onda que irão sofrer reflexão e formar a condição inicial e recomeçar o processo.

Observamos que antes da onda encontrar a fronteira numérica a solução obtida concorda com a solução por d'Alembert, porém, ao chegar as bordas temos reflexões espúrias, o que evidencia a necessidade de um método para evitá-las.

2.1.2 Discretização do Modelo Bidimensional (2D)

Para o caso bidimensional, a onda se propaga no plano xz . Utilizaremos a seguinte notação: $u(x_i, z_j, t_k) = u_{i,j}^k$, onde $x_i = x_0 + i \cdot \Delta x$; $z_j = z_0 + j \cdot \Delta z$ e $t_k = t_0 + k \cdot \Delta t$.

Aproximamos a derivada parcial em relação a x usando o método das diferenças centrais de 2ª ordem, mantendo a coordenada z e o tempo t fixos:

$$u_{xx}(x_i, z_j, t_k) \approx \frac{u(x_i + \Delta x, z_j, t_k) - 2u(x_i, z_j, t_k) + u(x_i - \Delta x, z_j, t_k)}{\Delta x^2}. \quad (10)$$

Assim, a aproximação para a derivada em x fica:

$$u_{xx}(x_i, z_j, t_k) \approx \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2}. \quad (11)$$

De forma análoga, a derivada espacial em relação a z é calculada variando-se apenas o índice j :

$$u_{zz}(x_i, z_j, t_k) \approx \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta z^2}. \quad (12)$$

A derivada temporal segue o mesmo princípio do caso unidimensional, mas agora aplicada a cada ponto da malha espacial bidimensional (mantendo i e j fixos):

$$u_{tt}(x_i, z_j, t_k) \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2}. \quad (13)$$

Discretizando a equação da onda bidimensional (2) no ponto (x_i, z_j, t_k) em uma malha regular ($\Delta x = \Delta z = h$), temos:

$$\frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2} = \frac{1}{c_{i,j}^2} \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (14)$$

onde $c_{i,j} = c(x_i, z_j)$.

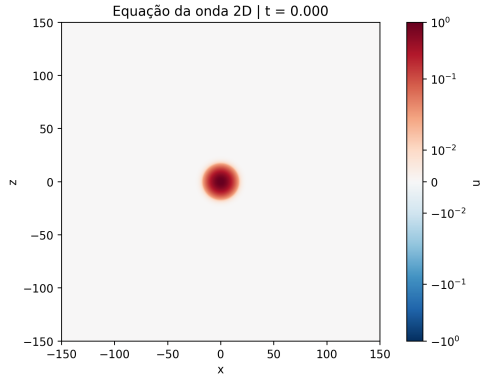
Agrupando os termos do lado esquerdo da igualdade, temos:

$$\frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k}{h^2} = \frac{1}{c_{i,j}^2} \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2}. \quad (15)$$

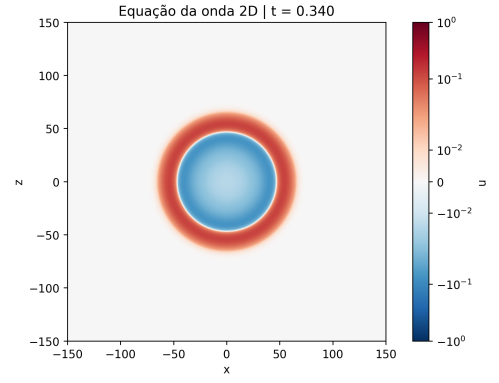
Por fim, isolando o termo de tempo futuro $u_{i,j}^{k+1}$, obtemos o esquema numérico explícito:

$$u_{i,j}^{k+1} = \left(\frac{c_{i,j} \Delta t}{h} \right)^2 (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k) + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}. \quad (16)$$

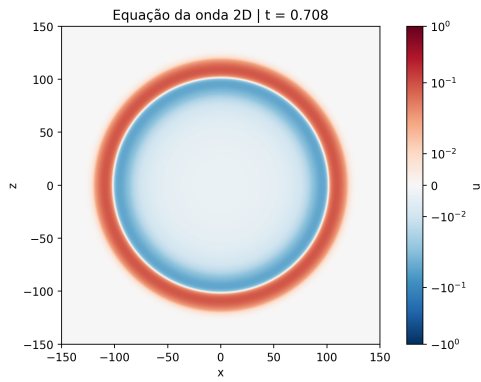
Assim, com uma condição inicial, dada na Figura 2 (a), podemos aproximar a solução da onda bidimensional para alguns tempos, como mostramos na Figura 2.



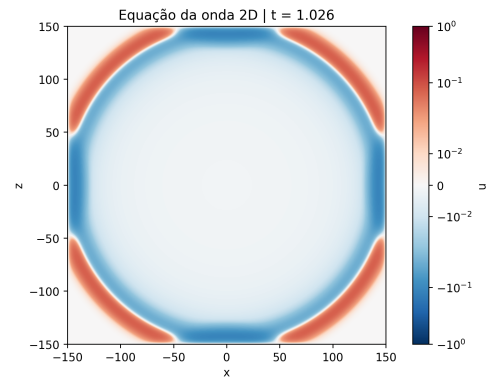
(a)



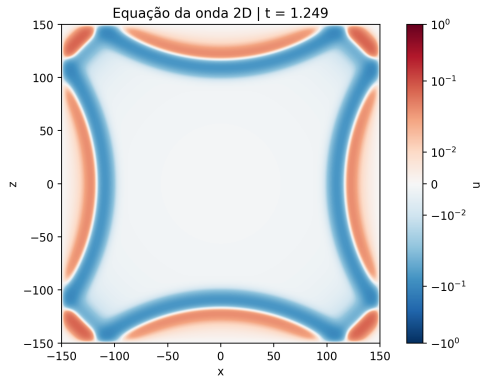
(b)



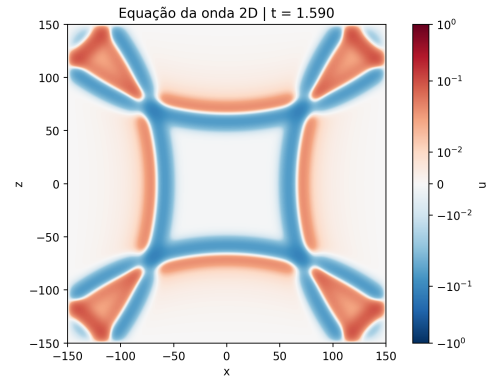
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2: Simulação da solução da onda bidimensional, para tempo: (a) $t = 0.000s$; (b) $t = 0.340s$; (c) $t = 0.708s$; (d) $t = 1.026s$; (e) $t = 1.249s$; (f) $t = 1.590s$.

- (a) $t = 0.000s$: Representa a condição inicial, definida por um pulso gaussiano.
- (b) $t = 0.340s$: Ocorre a propagação livre da onda. O pulso gaussiano expande-se, gerando uma frente de onda circular que viaja para longe da origem.

- (c) $t = 0.708s$: A frente de onda mantém o seu formato circular e continua se afastando do centro de maneira que se aproxima da fronteira.
- (d) $t = 1.026s$: A onda atinge as fronteiras laterais do domínio. Neste momento, temos uma frente de onda circular colidindo com a fronteira, a onda reflete na fronteira gerando inversão de fase, ou seja, ela reflete gerando novas frentes curvas invertidas (em azul) que começam a viajar de volta para dentro do domínio numérico.
- (e) $t = 1.249s$: A onda original alcança as quinas do domínio. A combinação das ondas refletidas nas paredes com as ondas difratadas nos cantos começa a criar um padrão de propagação complexo.
- (f) $t = 1.590s$: As ondas refletidas e difratadas encontram-se no interior do domínio, gerando um forte padrão de interferência construtiva e destrutiva (visível pelos cruzamentos vermelhos e azuis). Isso polui a simulação com dados artificiais.

Logo, como no caso 1D a simulação ocorre conforme o esperado até encontrar a fronteira, após encontrá-la, sofre reflexão, justificando diretamente a necessidade de implementar condições de contorno absorventes para evitar essas reflexões.

2.2 Condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Para garantir a estabilidade de esquemas numéricos explícitos, é necessário satisfazer a Condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Fisicamente, essa métrica assegura que a velocidade de propagação da informação na malha numérica seja no mínimo igual à velocidade real da onda física.

A demonstração matemática dessa restrição é fornecida em Strikwerda [2004]. Ao analisar equações diferenciais, o autor mostra o Teorema 1.6.1 que, para esquemas explícitos, “uma condição necessária para a estabilidade é a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)”.

2.2.1 CFL no Modelo Unidimensional (1D)

No domínio unidimensional, a condição de estabilidade é expressa por:

$$\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (17)$$

Nesta relação, c é a velocidade de propagação da onda, Δt é o passo de tempo e Δx é o espaçamento da malha espacial.

O que se extrai diretamente deste teorema é que a violação da condição ($\lambda > 1$) resulta obrigatoriamente na instabilidade do esquema numérico.

2.2.2 CFL no Modelo Bidimensional (2D)

A expansão para duas dimensões altera a restrição de estabilidade do esquema numérico. Para que a propagação numérica não exceda a velocidade da onda física em uma malha bidimensional regular ($\Delta x = \Delta y = h$), a condição de estabilidade passa a ser:

$$\lambda = \frac{c\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707, \quad (18)$$

isso demonstra que o número de Courant λ é mais restritivo no caso bidimensional.

2.2.3 Dispersão Numérica e Escolha da Malha

Mesmo que a condição de estabilidade (CFL) seja rigorosamente respeitada, a escolha do refinamento da malha afeta diretamente a precisão do método numérico em qualquer dimensão. Passos espaciais excessivamente grandes podem introduzir deformações na solução associadas à dispersão numérica. Portanto, deve-se sempre determinar uma malha condizente com a precisão exigida pelo problema físico.

Para exemplificar este impacto visualmente, a Figura 3 ilustra o fenômeno no modelo unidimensional. Embora ambas as simulações sejam matematicamente estáveis, o passo espacial Δx escolhido no gráfico inferior é grande o suficiente para causar imprecisões no método, distorcendo o formato original da onda ao longo de sua propagação quando comparado à malha mais fina do gráfico superior.

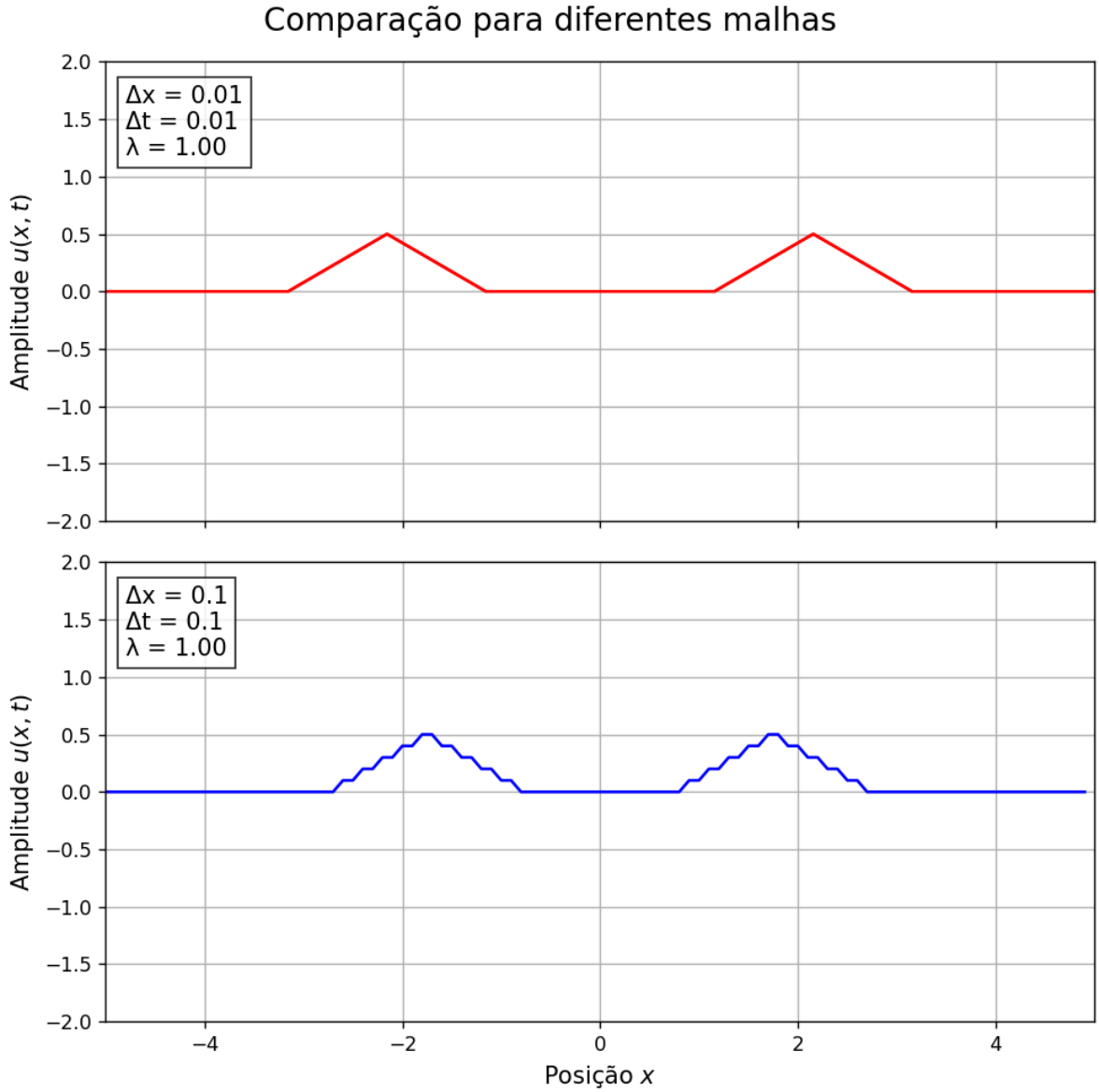


Figura 3: Impacto da escolha da malha na dispersão numérica da onda.

2.3 Condições de Fronteira Absorventes

Na simulação numérica de fenômenos físicos, a capacidade computacional restringe o tamanho do domínio em que o problema pode ser modelado. Fisicamente, muitas ondas se propagam para o infinito em um meio sem fronteira. No entanto, em um computador, a malha é estabelecida em um domínio finito, ou seja, as bordas atuam como “paredes rígidas perfeitas”, como visto nas Figuras 1 e 2, fazendo com que a onda reflita de volta para o interior do domínio. Essas reflexões artificiais interferem na solução real

e invalidam a simulação do fenômeno físico.

Para contornar esse problema, introduzem-se as Condições de Fronteira Absorventes (*Absorbing Boundary Conditions* - ABC). O objetivo dessas fronteiras é absorver a energia da onda que atinge as extremidades do domínio, garantindo que ela saia da malha computacional sem gerar reflexões de borda.

Para mitigar essas reflexões indesejadas, diferentes abordagens foram adotadas neste trabalho, dependendo da dimensionalidade do problema. No modelo unidimensional, a formulação implementada baseou-se na metodologia detalhada pelo *National Programme on Technology Enhanced Learning* (NPTEL) NPTEL-NOC IITM [2022]. Já para a simulação bidimensional, que lida com uma propagação angular muito mais complexa, adotou-se a técnica de Camadas Perfeitamente Casadas (*Perfectly Matched Layers* — PML), fundamentada por Chern [2019].

2.3.1 Caso Unidimensional (1D)

Para o cenário unidimensional, a técnica consiste em fatorar a equação da onda em duas equações unidirecionais de primeira ordem:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0 \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) u = 0. \quad (20)$$

A Equação (19) modela estritamente uma onda viajando para a direita, enquanto a Equação (20) modela uma onda viajando para a esquerda. Ao impor apenas essas condições unidirecionais nas extremidades pertinentes da malha, força-se matematicamente a onda a apenas sair do domínio.

Não podemos usar a diferença central nas bordas da malha (índices $i = 0$ e $i = N$), pois isso exigiria o cálculo com pontos que estão fora do domínio. Por isso, utilizam-se aproximações numéricas que dependem exclusivamente dos pontos internos disponíveis:

- Para a fronteira esquerda ($i = 0$), aplica-se a diferença *forward* (progressiva) no espaço, que calcula a derivada usando o ponto atual da borda e o seu vizinho ime-

diato à direita:

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_1^k - u_0^k). \quad (21)$$

- Para a fronteira direita ($i = N$), aplica-se a diferença *backward* (regressiva) no espaço, que utiliza o ponto atual da borda e o seu vizinho imediato à esquerda:

$$u_N^{k+1} = u_N^k - \frac{c\Delta t}{\Delta x}(u_N^k - u_{N-1}^k). \quad (22)$$

A eficácia da técnica é evidenciada visualmente na Figura 4 que demonstra o comportamento esperado de uma onda com domínio infinito.

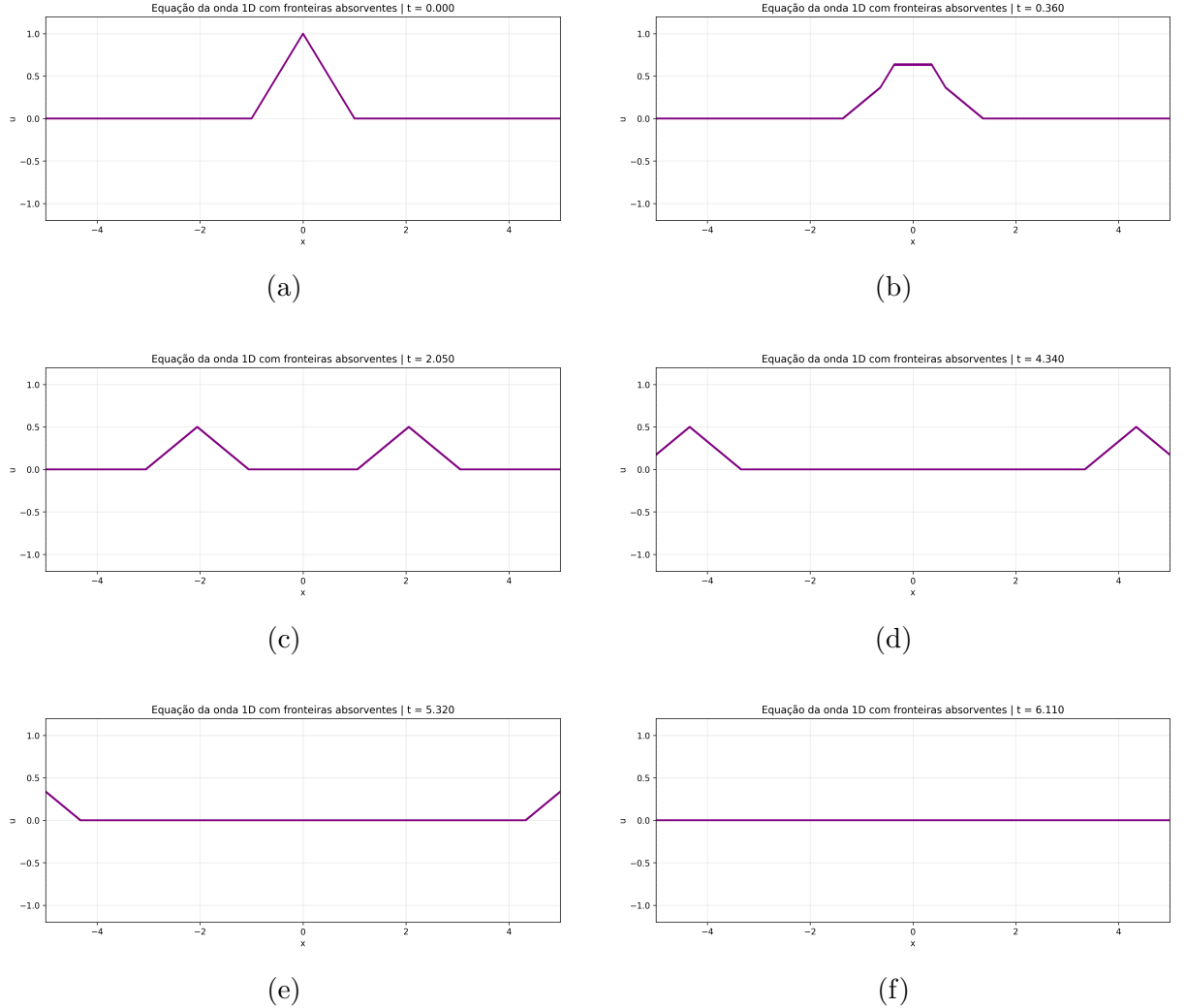


Figura 4: Onda unidimensional com fronteiras ABC, para tempo: (a) $t = 0.000s$; (b) $t = 0.360s$; (c) $t = 2.050s$; (d) $t = 4.340s$; (e) $t = 5.320s$; (f) $t = 6.110s$.

A implementação das Condições de Contorno Absorventes (ABC - *Absorbing*

Boundary Conditions) permite que o modelo numérico emule um meio físico infinito dentro de um domínio computacional truncado. A simulação respeita perfeitamente a solução analítica irrestrita de d'Alembert, eliminando de forma definitiva as reflexões artificiais observadas no caso anterior com fronteiras rígidas:

- (a) $t = 0.000s$: Mantém-se a condição inicial idêntica à anterior. O pico do pulso triangular encontra-se centrado na origem ($x = 0$) com amplitude máxima de 1.0.
- (b) $t = 0.360s$: Ocorre a separação inicial do pulso como esperado pela solução de d'Alembert.
- (c) $t = 2.050s$: As ondas estão completamente separadas, propagando-se em direções opostas.
- (d) $t = 4.340s$: O avanço linear continua inalterado. Os pulsos começam a encontrar as bordas, mas não sofrem nenhuma alteração. Ou seja, não estão sofrendo reflexão como foi visto na Figura 1(d).
- (e) $t = 5.320s$: Neste instante, evidencia-se a eficácia da implementação das condições ABC. Diferentemente do cenário com fronteiras truncadas, no qual a onda colidia com a borda e sofria uma inversão de fase voltando para o centro, aqui a onda simplesmente atravessa. A parte do pulso que já cruzou o limite é absorvida pela fronteira.
- (f) $t = 6.110s$: O processo de absorção é concluído. Os pulsos cruzaram integralmente as extremidades do domínio computacional.

Desse modo, a condição inicial se divide em duas novas ondas que conservam a amplitude inicial viajando em direções opostas e ao encontrar as fronteiras as ondas se deslocam para o infinito sem sofrer reflexões. Demonstrando a eficácia das condições de fronteira impostas.

2.3.2 Extensão das Condições ABC do caso unidimensional para o cenário bidimensional

Com o objetivo de avaliar o desempenho de contornos absorventes, a formulação das condições ABC 1D foi estendida diretamente para as quatro extremidades

de uma malha bidimensional.

Para os nós localizados nas fronteiras externas, onde o esquema centrado não pode ser aplicado devido à ausência de pontos vizinhos, implementam-se as aproximações direcionais.

Para a fronteira $i = 0$, utiliza-se a aproximação progressiva na direção espacial x :

$$u_{0,j}^{k+1} = u_{0,j}^k + \frac{c\Delta t}{h} (u_{1,j}^k - u_{0,j}^k). \quad (23)$$

Para a fronteira $i = N_x$, aplica-se a aproximação regressiva na direção espacial x :

$$u_{N_x,j}^{k+1} = u_{N_x,j}^k - \frac{c\Delta t}{h} (u_{N_x,j}^k - u_{N_x-1,j}^k). \quad (24)$$

Para a fronteira $j = 0$, adota-se a aproximação progressiva na direção espacial z :

$$u_{i,0}^{k+1} = u_{i,0}^k + \frac{c\Delta t}{h} (u_{i,1}^k - u_{i,0}^k). \quad (25)$$

Para a fronteira $j = N_z$, aplica-se a aproximação regressiva na direção espacial z :

$$u_{i,N_z}^{k+1} = u_{i,N_z}^k - \frac{c\Delta t}{h} (u_{i,N_z}^k - u_{i,N_z-1}^k). \quad (26)$$

A Figura 5 mostra o dado inicial em (a) e a propagação em vários instantes de tempo (b)-(f), usando as condições de fronteiras descritas nas equações (23), (24), (25) e (26).

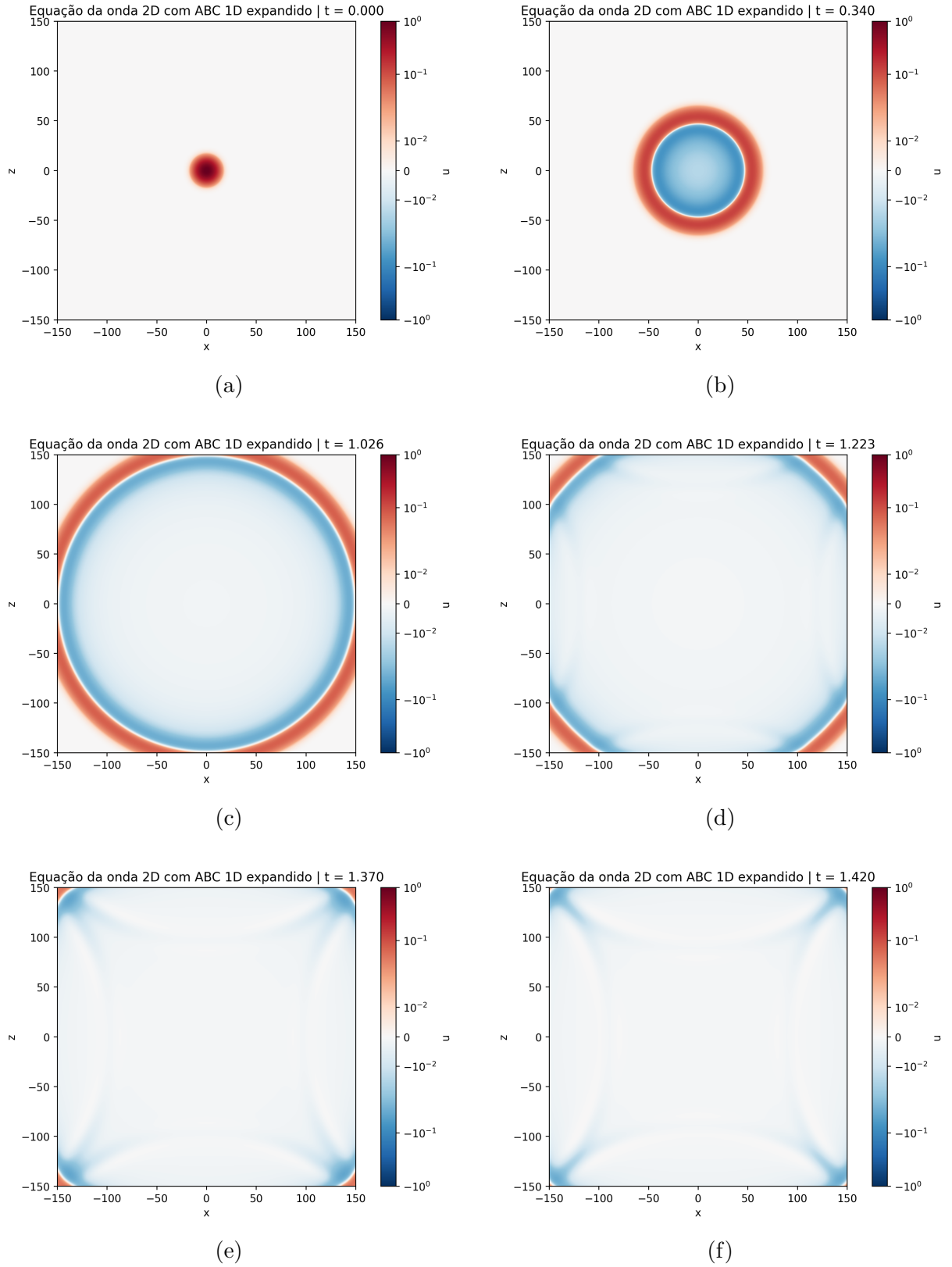


Figura 5: Onda bidimensional com ABC na fronteira

A análise visual dos resultados numéricos obtidos confirmam as limitações

desta estratégia adaptada. Observa-se que o método não funciona de maneira satisfatória nas regiões centrais das bordas.

Além disso, nas quinas do domínio, Figura 5 (d)-(f), apresentaram-se falhas críticas, as quais geraram fortes reflexões artificiais. Nas quinas, a onda atinge as paredes e interage com duas fronteiras ao mesmo tempo. A incapacidade do algoritmo de contorno em absorver esses múltiplos ângulos simultaneamente faz com que parte expressiva da energia retorne para o interior do domínio. O problema de reflexão evidencia a necessidade de uma técnica de contorno mais robusta para simulações bidimensionais, justificando o desenvolvimento de camadas perfeitamente casadas.

2.3.3 Caso 2D (Formulação da Camada Perfeitamente Casada Discreta)

Para resolver as limitações de incidência oblíqua e os problemas de quina, adota-se a técnica da Camada Perfeitamente Casada (*Perfectly Matched Layer* - PML). A PML funciona como uma região absorvente posicionada imediatamente antes da fronteira rígida externa, conforme ilustrado na Figura 6.

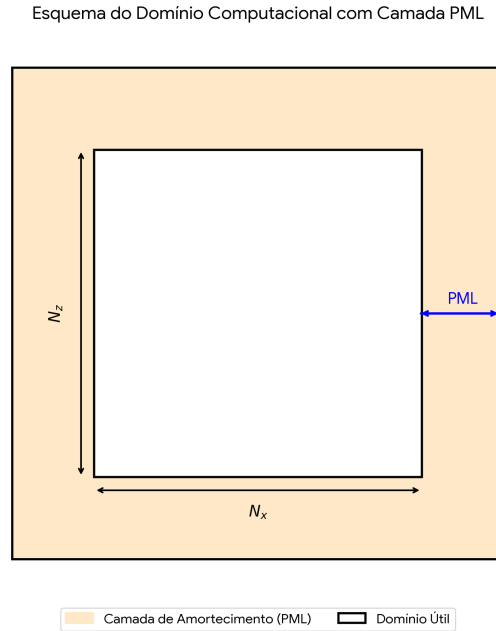


Figura 6: Esquema do domínio computacional com a camada PML localizada de forma interior à borda externa.

O modelo implementado neste trabalho utiliza a formulação desenvolvida por Chern [2019]. Em seu trabalho, o autor utiliza fundamentos da Análise Complexa Discreta

para aplicar um estiramento de coordenadas complexas (*complex coordinate stretching*) diretamente no ambiente discreto. Ao deduzir o sistema inteiramente sobre a grade computacional.

Para construir esse amortecimento, Chern (2019) propõe um sistema acoplado de três equações operando no tempo contínuo, dadas por:

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} = \sum_{\alpha \in \{x,z\}} \frac{1}{h^2} (-2u_{i,j} + \tau_\alpha^{-1} u_{i,j} + \tau_\alpha u_{i,j}) + \sum_{\alpha \in \{x,z\}} \frac{1}{h} [(\sigma_\alpha)(\tau_\alpha \Psi_{\alpha,i,j}) - (\tau_\alpha^{-1} \sigma_\alpha)(\tau_\alpha^{-1} \Phi_{\alpha,i,j})] \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \Phi_{\alpha,i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{2} [(\tau_\alpha^{-1} \sigma_\alpha)(\tau_\alpha^{-1} \Phi_{\alpha,i,j}) + \sigma_\alpha \Phi_{\alpha,i,j}] - \frac{1}{2h} (\tau_\alpha u_{i,j} - \tau_\alpha^{-1} u_{i,j}) \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \Psi_{\alpha,i,j}}{\partial t} = -\frac{1}{2} [(\tau_\alpha^{-1} \sigma_\alpha) \Psi_{\alpha,i,j} + \sigma_\alpha (\tau_\alpha \Psi_{\alpha,i,j})] - \frac{1}{2h} (\tau_\alpha u_{i,j} - \tau_\alpha^{-1} u_{i,j}). \quad (4c)$$

Neste sistema, $u_{i,j}$ é a amplitude da onda principal e $\sigma_\alpha \geq 0$ representa o coeficiente de amortecimento espacial. As variáveis $\Phi_{\alpha,i,j}$ e $\Psi_{\alpha,i,j}$ são estados auxiliares de memória. O símbolo τ_α atua como um operador de translação na direção $\alpha \in \{x, z\}$. No eixo horizontal (x), a aplicação de τ_x avança a leitura para o nó vizinho da direita ($i+1$), enquanto τ_x^{-1} recua para a esquerda ($i-1$). O mesmo princípio se aplica ao eixo vertical (z) deslocando a leitura para $j+1$ ou $j-1$.

Eliminando a notação do operador de translação, discretizando as derivadas temporais utilizando o método das diferenças finitas centrais, e isolando o termo futuro, o sistema completo de equações pode ser reescrito de forma explícita. Para a equação (4a), expandindo-se os somatórios, tem-se:

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^{k+1} = & \underbrace{\left(\frac{c_{i,j}\Delta t}{h}\right)^2 (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k) + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}}_{\text{Discretização da onda 2D}} \\
& + \underbrace{c_{i,j}^2 \Delta t^2 \left[\frac{\sigma_{x,i,j} \Psi_{x,i+1,j}^k - \sigma_{x,i-1,j} \Phi_{x,i-1,j}^k}{h} + \frac{\sigma_{z,i,j} \Psi_{z,i,j+1}^k - \sigma_{z,i,j-1} \Phi_{z,i,j-1}^k}{h} \right]}_{\text{PML}}. \tag{27}
\end{aligned}$$

Para as variáveis auxiliares atuando na direção horizontal (x), as equações (4b) e (4c) assumem a forma:

$$\Phi_{x,i,j}^{k+1} = \Phi_{x,i,j}^{k-1} - \Delta t \left[(\sigma_{x,i-1,j} \Phi_{x,i-1,j}^k + \sigma_{x,i,j} \Phi_{x,i,j}^k) + \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h} \right], \tag{28}$$

$$\Psi_{x,i,j}^{k+1} = \Psi_{x,i,j}^{k-1} - \Delta t \left[(\sigma_{x,i-1,j} \Psi_{x,i,j}^k + \sigma_{x,i,j} \Psi_{x,i+1,j}^k) + \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h} \right]. \tag{29}$$

De forma análoga, para a direção vertical (z), as variáveis de memória são atualizadas por:

$$\Phi_{z,i,j}^{k+1} = \Phi_{z,i,j}^{k-1} - \Delta t \left[(\sigma_{z,i,j-1} \Phi_{z,i,j-1}^k + \sigma_{z,i,j} \Phi_{z,i,j}^k) + \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{h} \right], \tag{30}$$

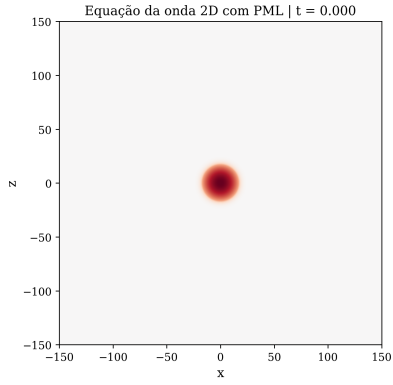
$$\Psi_{z,i,j}^{k+1} = \Psi_{z,i,j}^{k-1} - \Delta t \left[(\sigma_{z,i,j-1} \Psi_{z,i,j}^k + \sigma_{z,i,j} \Psi_{z,i,j+1}^k) + \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{h} \right]. \tag{31}$$

Nota-se que o primeiro termo expandido na equação de $u_{i,j}^{k+1}$ aproxima a parte da nossa equação de onda, sendo algebricamente idêntico à Equação 16. A diferença metodológica de Chern (2019) reside na adição do segundo termo, onde as variáveis auxiliares Φ e Ψ funcionam como “esponjas” acopladas para absorver a energia da onda direcionalmente.

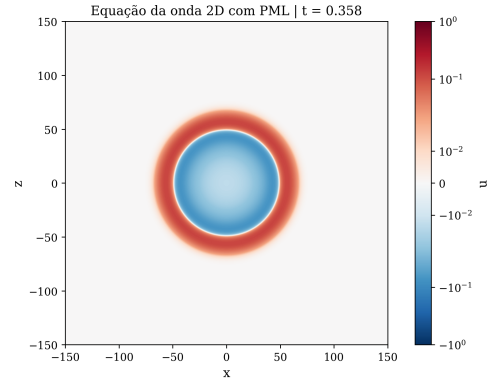
No domínio físico útil, onde o amortecimento é nulo ($\sigma_x = \sigma_z = 0$), os termos auxiliares perdem o efeito e o sistema se reduz à equação livre da onda. Apenas dentro da região da PML o coeficiente σ_α cresce gradualmente até a borda externa rígida, obedecendo ao perfil de transição suave:

$$\sigma_\alpha(s) = \sigma_{\max} \left(\frac{s_{\text{fronteira}} - s}{N_{\text{pml}}} \right)^2. \quad (32)$$

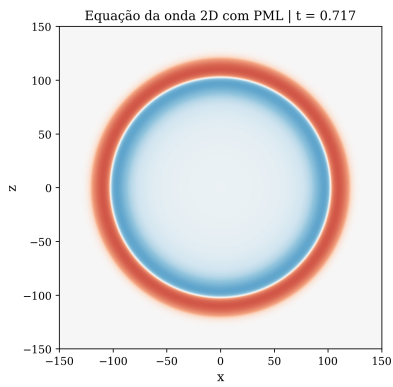
Logo, com a aplicação conjunta dessas equações, é possível simular a propagação de uma onda 2D sem reflexões espúrias nas fronteiras, como visto na Figura 7.



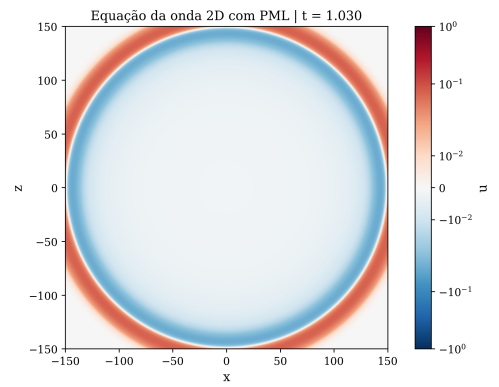
(a)



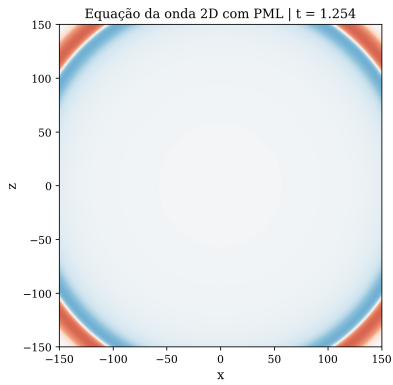
(b)



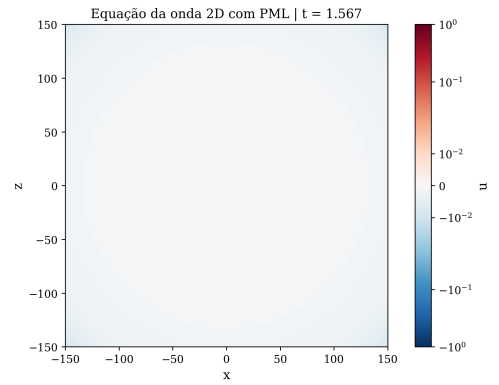
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 7: Propagação de uma onda bidimensional a condição PML.

2.4 Análise de reflexões.

A fim de validar que as condições de fronteira funcionam mesmo quando o meio não é homogêneo, será analisado o comportamento da propagação da onda entre dois meios com velocidades diferentes.

2.4.1 Parcialmente Transmissivo

Para simular a transição entre dois meios distintos, define-se um domínio com duas velocidades de propagação diferentes, separadas por uma interface. A velocidade c ao longo do espaço, para a onda 1D é dada por:

$$c(x) = \begin{cases} c_1, & x < x_0 \\ c_2, & x \geq x_0 \end{cases}. \quad (33)$$

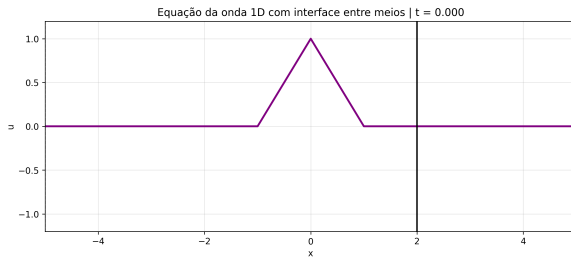
No caso bidimensional, a velocidade passa a depender das coordenadas espaciais x e z , sendo definida de forma análoga.

$$c(x, z) = \begin{cases} c_1, & z < z_0 \\ c_2, & z \geq z_0 \end{cases}. \quad (34)$$

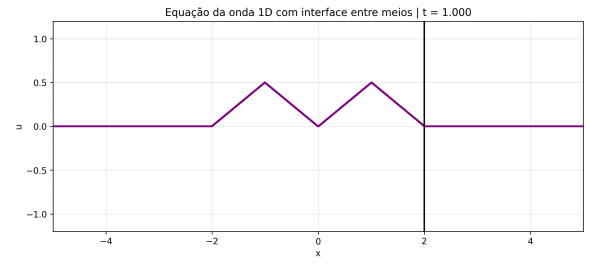
2.4.2 Mudança de Meio 1D

Analisou-se o comportamento da onda ao encontrar uma interface entre dois meios com velocidades de propagação distintas, com $c_1 = 0.5 \text{ km/s}$ e $c_2 = 1 \text{ km/s}$, com $x_0 = 2$.

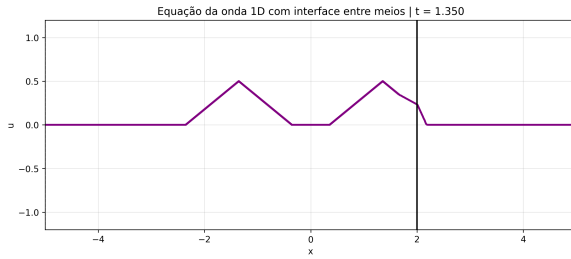
Conforme ilustrado na Figura 8, inicialmente, o sistema apresenta a condição inicial de um triângulo (Figura 8(a)), o pulso se divide em duas frentes de onda propagando-se em sentidos opostos (Figura 8(b)). Ao atingir a interface em $x = 2$, observa-se o fenômeno físico esperado: parte da onda é transmitida para o segundo meio apresentando maior amplitude devido a maior velocidade, enquanto outra parte é refletida de volta ao meio original (Figura 8(c)-(f)). Por fim, as ondas propagadas seguem seu curso e são absorvidas pelas condições de contorno (ABC) nas extremidades do domínio, sem gerar reflexões artificiais (Figura 8(g)-(h)). Este comportamento confirma que a implementação respeita a física da transmissão e reflexão, funcionando perfeitamente conforme o esperado.



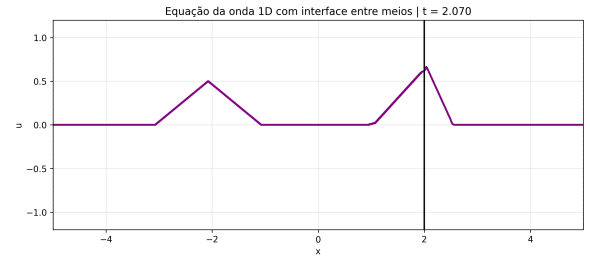
(a)



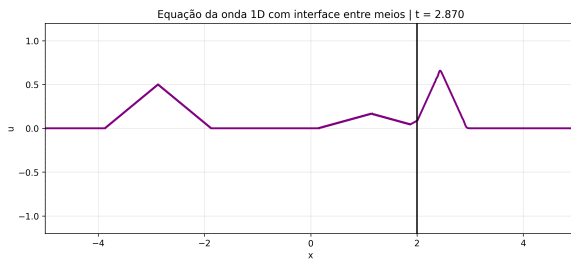
(b)



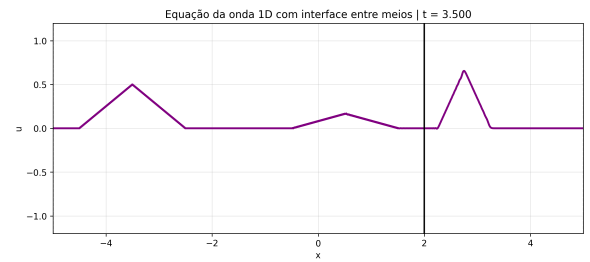
(c)



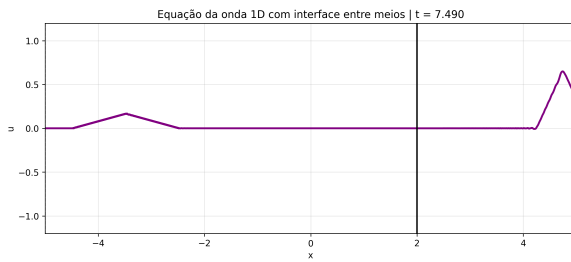
(d)



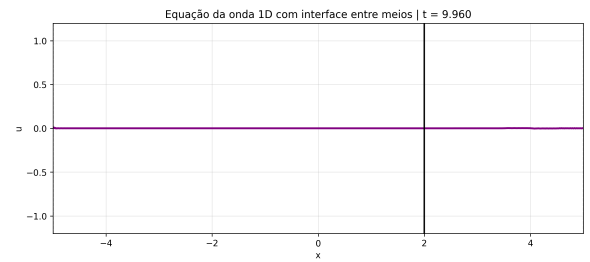
(e)



(f)



(g)



(h)

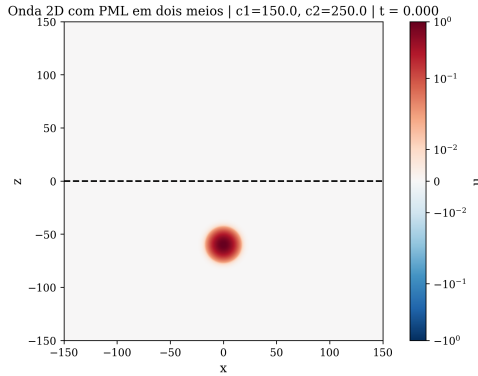
Figura 8: Equação da onda 1D com interface entre meios para: (a) $t = 0.000$ s; (b) $t = 1.000$ s; (c) $t = 1.350$ s; (d) $t = 2.070$ s; (e) $t = 2.870$ s; (f) $t = 3.500$ s; (g) $t = 7.490$ s; (h) $t = 9.960$ s.

2.4.3 Mudança de Meio 2D

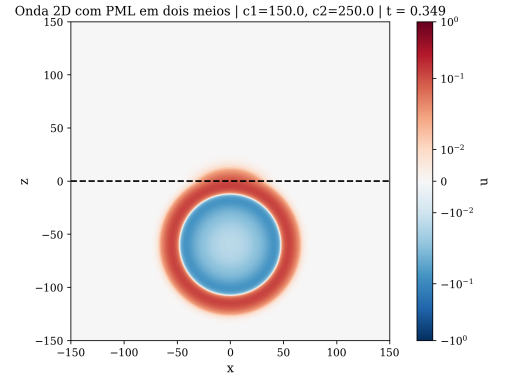
Investigou-se a dinâmica da onda bidimensional ao incidir sobre uma fronteira separando dois meios com velocidades de propagação diferentes, sendo $c_1 = 150.0 \text{ m/s}$ e $c_2 = 250.0 \text{ m/s}$, com a transição situada em $z = 0$.

Como evidenciado na Figura 9, o sistema parte de uma perturbação inicial na forma de um pulso gaussiano (Figura 9(a)); à medida que o tempo avança, a frente de onda se propaga (Figura 9(b)). Ao interceptar a divisão em $z = 0$, nota-se que uma fração da energia é transmitida para a região superior, sofrendo uma distorção em sua curvatura em virtude do aumento de velocidade, a medida que a outra porção é rebatida para o meio de origem (Figura 9(c)-(e)).

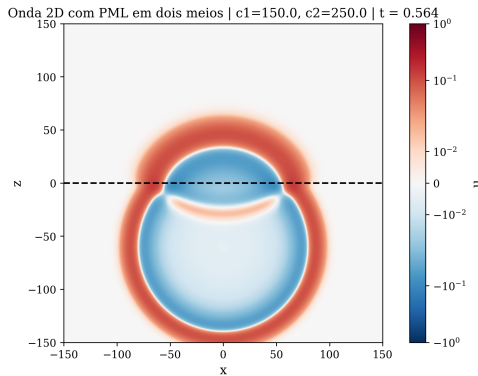
Finalmente, as frentes de onda continuam sua trajetória e não sofrem reflexões nas bordas numéricas devido as condições de fronteira PML (veja Figura 9(a)-(h)). Esse resultado atesta que o esquema numérico reproduz fielmente as propriedades físicas de transmissão e reflexão em uma mudança de meio.



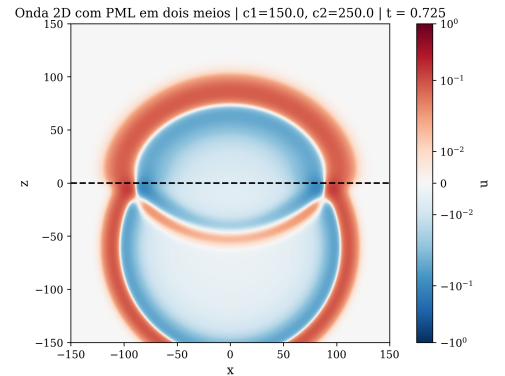
(a)



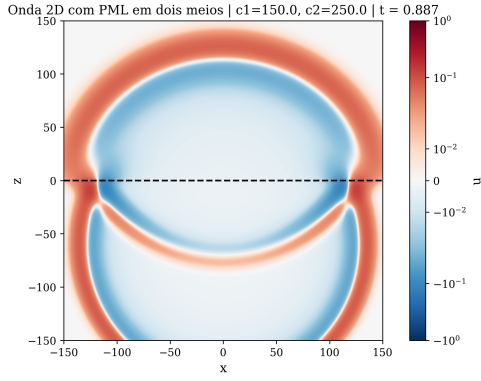
(b)



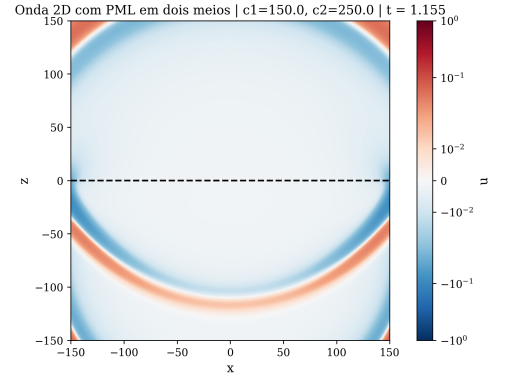
(c)



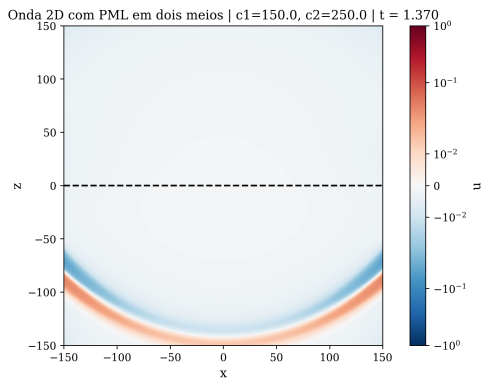
(d)



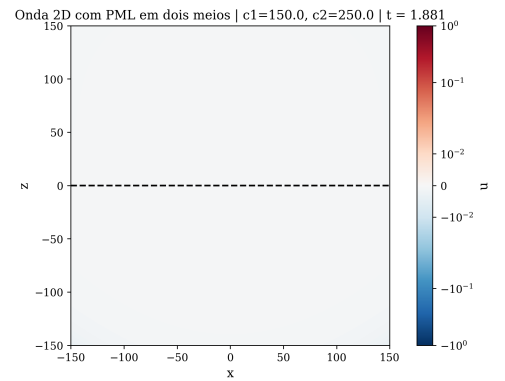
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 9: Onda 2D em meio Parcialmente Transmissivo.

3 Conclusão

Este trabalho apresentou a simulação da equação da onda utilizando o Método das Diferenças Finitas, com foco na eliminação de reflexões artificiais nas bordas do domínio numérico.

Foi possível observar que, tanto no caso unidimensional quanto no bidimensional, o uso de camadas absorventes garantiu que a onda transitasse entre diferentes meios e atingisse as fronteiras sem gerar reflexões artificiais. No cenário 2D, a implementação da técnica PML demonstrou-se eficiente, diferente da condição ABC expandida.

Logo, as metodologias adotadas permitiram simular a propagação de ondas em um meio qualquer respeitando a física do problema, independente do domínio numérico.

Referências

Albert Chern. A reflectionless discrete perfectly matched layer. *Journal of Computational Physics*, 2019.

NPTEL-NOC IITM. FDTD: Materials and boundary conditions: Absorbing boundary conditions - 1d. Vídeo no YouTube, 2022. URL <https://www.youtube.com/watch?v=kKzRsorjHoA>. Acesso em: 27 abr. 2026.

Herch Moysés Nussenzveig. *Curso de Física Básica, vol. 2: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*. Blucher, São Paulo, 2002.

John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, 2nd edition, 2004.

A Apêndice

A.1 Diferenças finitas

Para demonstrar a aproximação da derivada segunda em relação ao espaço pelo método das diferenças finitas, utilizamos a expansão em Série de Taylor de uma função contínua $u(x, t)$ em torno do ponto espacial x_i , mantendo o instante de tempo t_k constante.

Fazendo a expansão de Taylor, temos

$$u(x_i + \Delta x, t_k) = u(x_i, t_k) + \Delta x u_x(x_i, t_k) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(x_i, t_k) + \frac{\Delta x^3}{3!} u_{xxx}(x_i, t_k) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (35)$$

e

$$u(x_i - \Delta x, t_k) = u(x_i, t_k) - \Delta x u_x(x_i, t_k) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(x_i, t_k) - \frac{\Delta x^3}{3!} u_{xxx}(x_i, t_k) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (36)$$

onde $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ representa os termos de ordem maior ou igual a 4.

Somando as equações (35) e (36), temos:

$$u(x_i + \Delta x, t_k) + u(x_i - \Delta x, t_k) = 2u(x_i, t_k) + \Delta x^2 u_{xx}(x_i, t_k) + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (37)$$

Isolando a derivada segunda espacial $u_{xx}(x_i, t_k)$, obtemos:

$$u_{xx}(x_i, t_k) = \frac{u(x_i + \Delta x, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i - \Delta x, t_k)}{\Delta x^2} - \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (38)$$

Ao desprezar os termos de erro $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, assumindo que Δx é suficientemente pequeno, chegamos à aproximação final utilizada:

$$u_{xx}(x_i, t_k) \approx \frac{u(x_i + \Delta x, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_i - \Delta x, t_k)}{\Delta x^2}. \quad (39)$$