



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Guilherme Valverde Freiria

Introdução a Equações Diferenciais Estocásticas e Precificação de Derivativos Através de Simulação

Campinas
03/07/2026

Guilherme Valverde Freiria

Introdução a Equações Diferenciais Estocásticas e Precificação de Derivativos Através de Simulação

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof Dr. Luiz Koodi Hotta.

*Este trabalho foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), quota 2024-2025.

Resumo

Este trabalho analisa o uso de Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs) na precificação de derivativos financeiros através de simulações numéricas. O estudo fundamenta-se no cálculo de Itô e no movimento browniano geométrico para modelar o preço de ativos. Foram implementados o método de Monte Carlo e os esquemas de Euler-Maruyama e Milstein para precificar opções europeias, utilizando variáveis antitéticas para redução de variância. Para opções americanas, aplicou-se o algoritmo de Longstaff e Schwartz. As simulações realizadas em Python demonstram a precisão e eficiência dos métodos numéricos em comparação com soluções analíticas e dados da literatura.

Abstract

This work analyzes the use of Stochastic Differential Equations (SDEs) for pricing financial derivatives through numerical simulations. The study is based on Itô calculus and geometric Brownian motion to model asset price dynamics. The Monte Carlo method, together with the Euler–Maruyama and Milstein schemes, was implemented to price European options, using antithetic variates as a variance reduction technique. For American options, the Longstaff–Schwartz algorithm was employed. Simulations carried out in Python demonstrate the accuracy and efficiency of the numerical methods when compared with analytical solutions and results reported in the literature.

Conteúdo

1	Introdução	6
2	Definições	6
2.1	Processos Estocásticos	6
2.2	Movimento browniano	7
2.3	σ -álgebra	7
2.4	Filtração	8
2.5	Processo Estocástico Adaptado a uma Filtração	8
2.6	Martingal em Tempo Contínuo	8
3	Cálculo Estocástico	8
3.1	Integral Estocástica de Itô	8
3.2	Fórmula de Itô	9
3.3	Lema de Itô para uma função de duas variáveis	10
4	Equações Diferenciais Estocásticas	10
4.1	Equações Diferenciais Determinísticas	10
4.2	Equações Diferenciais Estocásticas de Itô	10
4.3	Encontrando a Solução de EDEs de Itô pela Fórmula de Itô	11
4.4	Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais Estocásticas	13
5	Aplicações do Cálculo Estocástico em Finanças	14
5.1	Modelagem do Preço do Ativo e do Ativo Sem Risco	14
5.2	Composição do Portfólio e Estratégia Autofinanciada	15
5.3	Precificação de Opções: Conceitos e Formulação do Problema	16
5.4	Derivação da Equação de Black–Scholes	17
6	Simulações	19
6.1	Opções Europeias	19
6.2	Opções americanas	23
7	Conclusões	24

1 Introdução

A precificação de derivativos/instrumentos financeiros é um dos principais desafios da área de finanças quantitativas, especialmente diante do aumento da complexidade dos instrumentos disponíveis no mercado. Muitos desses instrumentos, como opções e outros tipos de derivativos, não possuem soluções analíticas diretas, o que torna indispensável o uso de métodos numéricos para estimar seus valores com precisão.

Neste projeto, foi investigado o uso de simulações numéricas aplicadas à precificação de opções, com ênfase na modelagem estocástica do comportamento dos ativos subjacentes. A evolução dos preços foi modelada por equações diferenciais estocásticas (EDEs), que permitem incorporar incertezas e flutuações observadas no mercado. A abordagem adotada inclui o estudo teórico de processos estocásticos, com destaque para o movimento browniano, e a aplicação prática desses modelos por meio de algoritmos de simulação como o método de Monte Carlo.

Ao longo do trabalho, foram exploradas ferramentas matemáticas fundamentais para a construção desses modelos, além de técnicas computacionais voltadas à geração de trajetórias e à análise estatística dos resultados. A proposta do projeto é fornecer uma introdução sólida aos conceitos centrais do cálculo estocástico e suas aplicações no contexto financeiro.

2 Definições

2.1 Processos Estocásticos

Um processo estocástico X é uma família de variáveis aleatórias definidas em um espaço de probabilidade e indexadas por algum conjunto T . Formalmente, seja

$$(X_t, t \in T) = (X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega),$$

onde t é um parâmetro que assume valores em um conjunto $T \subset \mathbb{R}$, denominado conjunto de índices do processo, e ω é o espaço amostral (Mikosch 1998, p. 23).

Observações:

- Matematicamente, T pode ser de qualquer natureza, porém em muitas aplicações representa o tempo.
- Quando T é um conjunto finito ou infinito numerável, X é classificado como um processo estocástico de tempo discreto. Se T não for numerável, o processo é considerado de tempo contínuo. Se T é finito, o processo é meramente um vetor aleatório, enquanto se for infinito numerável, consiste em uma sequência de variáveis aleatórias.

- O espaço de estados de X consiste nos possíveis valores que as variáveis aleatórias X_t podem tomar. Se este espaço é numerável, o processo é chamado de processo com espaço de estados discreto.
- Cada realização do processo estocástico X , também chamada de trajetória, é uma função do tempo $t \in T$, associando um valor específico x_t a cada instante t .
- O processo estocástico X funciona como uma função de duas variáveis:
 - Como variável aleatória para cada ponto fixo de tempo t (Mikosch 1998, p. 23):

$$X_t = X_t(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

- Como uma curva ou função do tempo ao longo de uma trajetória fixa, onde cada t é mapeado para um valor específico x_t .

2.2 Movimento browniano

Um processo estocástico $B = (B_t, t \in [0, \infty))$ diz-se um movimento browniano, ou processo de Wiener, quando (Mikosch 1998, p. 33):

- Se inicia com $B_0 = 0$.
- Tem incrementos estacionários e independentes.
- $B_t \sim N(0, t), \forall t > 0$.
- As trajetórias são funções contínuas de t .

Propriedade Importante:

As variáveis aleatórias $B_t - B_s$ e B_{t-s} têm uma distribuição $N(0, t - s)$ para $s < t$. Portanto a variância é proporcional ao tamanho do intervalo $[s, t]$ (Mikosch 1998, p. 35).

As trajetórias são funções contínuas, mas não são diferenciáveis e sua variação é ilimitada (Mikosch 1998, Apêndice A3, p. 188).

2.3 σ -álgebra

Seja Ω um conjunto não vazio. Uma σ -álgebra $\mathcal{F}$ (em Ω) é uma coleção de subconjuntos de Ω que satisfaz as seguintes condições (Mikosch 1998, p. 62):

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- Se $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$.
- Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

2.4 Filtração

A coleção $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de σ -álgebras em Ω é chamada de filtração se, para todo $s \geq t \geq 0$, temos

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s.$$

Portanto, uma filtração é um fluxo crescente de informações.

Se $(\mathcal{F}_n, n = 0, 1, \dots)$ é uma sequência de σ -álgebras em Ω tal que $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ para todo n , também chamamos $(\mathcal{F}_n)$ de filtração, conforme Mikosch (1998, p. 77).

2.5 Processo Estocástico Adaptado a uma Filtração

Diz-se que um processo estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ está adaptado à filtração $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ quando, de acordo com Mikosch (1998, p. 77),

$$\sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t, \quad t \geq 0.$$

Aqui, $\sigma(X_t)$ denota a σ -álgebra gerada pela variável aleatória X_t , isto é, o conjunto de eventos que podem ser “observados” a partir de X_t .

2.6 Martingal em Tempo Contínuo

Um processo estocástico $X = (X_t, t \geq 0)$ diz-se um martingal em tempo contínuo relativamente à filtração $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, e escreve-se $(X, (\mathcal{F}_t))$, quando (Mikosch 1998, p. 80):

- $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty, \quad t \geq 0$
- X está adaptado a $(\mathcal{F}_t)$.
- $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$, para $0 \leq s < t$, isto é, dada $\mathcal{F}_s$, X_s é a melhor previsão para X_t .

3 Cálculo Estocástico

3.1 Integral Estocástica de Itô

A integral estocástica é uma ferramenta fundamental na teoria de processos estocásticos e no cálculo estocástico. Ela permite integrar funções em relação a processos estocásticos, como o movimento browniano, que possuem comportamento altamente irregular. A integral estocástica é amplamente utilizada em diversas áreas, especialmente na matemática financeira, para modelar a evolução de preços de ativos financeiros.

Seja B_t um processo estocástico, conhecido como movimento browniano, e uma função $f(t, B_t)$ adaptada ao movimento browniano, ou seja, uma função cujo valor em

cada instante t depende apenas dos valores de B_s para $s \leq t$. A integral estocástica de f em relação ao movimento browniano B_t no intervalo $[0, T]$ é denotada por:

$$\int_0^T f(t, B_t) dB_t. \quad (3.1)$$

Diferente da integral de Riemann-Stieltjes, que requer variação limitada para a função de integração, a integral estocástica lida com o movimento browniano, que tem variação ilimitada. Para construir essa integral de Itô, usa-se uma soma do tipo "left-point" (ponto inicial) em cada subintervalo, o que resulta em propriedades específicas para a integral estocástica. Considere o intervalo $[0, T]$. A integral estocástica de Itô de $f(t, B_t)$ em relação a B_t é definida como o limite de uma soma de Itô:

$$\int_0^T f(t, B_t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, B_{t_i}) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \quad (3.2)$$

em que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ são pontos que subdividem $[0, T]$ de forma cada vez mais refinada, e $f(t_i, B_{t_i})$ é avaliado no ponto inicial de cada subintervalo.

A escolha do ponto inicial é essencial para caracterizar a integral de Itô, pois assegura propriedades importantes, como a preservação da martingalidade do processo resultante (Mikosch 1998, p. 103).

3.2 Fórmula de Itô

A fórmula de Itô é uma generalização da regra da cadeia para o cálculo diferencial estocástico. Ela descreve como a função de um processo estocástico, como o movimento browniano, evolui ao longo do tempo. A fórmula de Itô é especialmente útil para calcular integrais estocásticas de Itô.

Seja f uma função duas vezes continuamente diferenciável. A forma simples do Lema de Itô (Fórmula de Itô) é:

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x) dB_x + \frac{1}{2} \int_s^t f''(B_x) dx, \quad s < t. \quad (3.3)$$

Exemplo: Escolha $f(t) = t^2$. Então, $f'(t) = 2t$ e $f''(t) = 2$. Assim, o Lema de Itô fornece, para $s < t$, Mikosch (1998)[p.115]

$$B_t^2 - B_s^2 = 2 \int_s^t B_x dB_x + \int_s^t dx.$$

Para $s = 0$, obtemos

$$\int_0^t B_x dB_x = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

3.3 Lema de Itô para uma função de duas variáveis

Seja $f(t, x)$ uma função cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Então (Mikosch 1998, p. 117):

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left[f_1(x, B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x, B_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x, B_x) dB_x, \quad s < t \quad (3.4)$$

com as derivadas parciais:

$$f_1(t, z) = \frac{\partial f(t, z)}{\partial t}, \quad f_2(t, z) = \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}, \quad f_{22}(t, z) = \frac{\partial^2 f(t, z)}{\partial z^2}.$$

4 Equações Diferenciais Estocásticas

Esta seção é dedicada ao estudo das EDEs e suas soluções. Inicialmente, apresenta-se uma breve introdução às equações diferenciais ordinárias (EDOs), destacando seu caráter determinístico e a forma como podem ser interpretadas quando sujeitas a perturbações por ruído aleatório. Em seguida, aborda-se a formulação das EDEs e os métodos para sua solução.

4.1 Equações Diferenciais Determinísticas

A teoria das equações diferenciais é um pilar fundamental do cálculo clássico. Essas equações modelam a evolução de sistemas dinâmicos ao longo do tempo, sendo amplamente aplicadas em diversas áreas da ciência e engenharia.

A forma geral de uma equação diferencial ordinária pode ser escrita como:

$$f(t, x(t), x'(t), \dots) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

onde t representa o tempo, $x(t)$ é uma função desconhecida e $x'(t)$ denota sua derivada. A solução dessa equação consiste em uma função $x(t)$ que satisfaz essa relação (Mikosch 1998, p. 132).

4.2 Equações Diferenciais Estocásticas de Itô

Enquanto as equações diferenciais ordinárias descrevem sistemas determinísticos, muitas aplicações exigem a incorporação de ruído aleatório. Isso nos leva ao conceito de equações diferenciais estocásticas EDEs, fundamentais para modelar processos que evoluem sob influência de incerteza.

Uma equação diferencial estocástica de Itô é definida como (Mikosch 1998, p. 135):

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t, \quad X_0 = Y(\omega). \quad (4.1)$$

Essa equação envolve dois termos principais: a tendência (drift) $a(t, X_t) dt$, que representa a tendência determinística do sistema, e o ruído ou volatilidade $b(t, X_t) dB_t$, responsável pela componente aleatória do processo. A solução X_t , ou seja, o processo associado a uma equação diferencial estocástica de Itô, é chamada de processo de difusão (Mikosch 1998, p. 137).

Dado que B_t possui caminhos não diferenciáveis, a equação diferencial tradicional perde o significado e precisa ser reformulada em termos de integrais estocásticas, o que leva à definição da equação diferencial estocástica de Itô:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dB_s, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.2)$$

A segunda integral é a integral de Itô e requer o uso do cálculo estocástico, pois difere das integrais usuais de Riemann ou Lebesgue. O termo driving process (ou processo dirigidor) refere-se ao processo estocástico que impulsiona a dinâmica da EDE. Dessa forma, o movimento browniano é chamado de driving process da equação (4.2) (Mikosch 1998, p. 136).

4.3 Encontrando a Solução de EDEs de Itô pela Fórmula de Itô

Para resolver algumas EDEs de Itô, podemos utilizar uma ferramenta apresentada na seção anterior: o Lema de Itô, que pode ser empregado para encontrar soluções explícitas. A seguir, apresentamos dois exemplos importantes:

4.3.1 Exemplo: Movimento browniano Geométrico

O movimento browniano geométrico pode ser definido como a solução da equação:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad (4.3)$$

onde μ e σ são constantes, ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s. \quad (4.4)$$

Este processo é amplamente utilizado na modelagem de preços de ativos financeiros.

Utilizando a fórmula de Itô podemos encontrar a solução da seguinte forma. Suponhamos que $X_t = f(t, B_t)$ para alguma função suave $f(t, x)$ sendo $f \in C^2$, ou seja, possui derivadas de primeira e segunda ordem contínuas. Pela fórmula de Itô, temos

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s. \quad (4.5)$$

Comparando (4.4) com (4.5), temos (existe unicidade de representação como processo de Itô):

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \mu f(t, x), \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sigma f(t, x). \quad (4.7)$$

Derivando a equação (4.7), obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sigma^2 f(t, x),$$

e substituindo em (4.6), temos que

$$\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x).$$

Por separação de variáveis $f(t, x) = g(t)h(x)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = g'(t)h(x),$$

e

$$g'(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) g(t),$$

que é uma EDO linear com solução:

$$g(t) = g(0) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right].$$

Usando a equação (4.7), obtemos a EDO linear $h'(x) = \sigma h(x)$ cuja a solução é $h(x) = h(0) \exp(\sigma x)$ sendo $f(0, 0)$ a condição inicial, temos:

$$f(t, x) = f(0, 0) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma x \right].$$

Conclusão: a solução da EDE (4.3) é o processo

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right], \quad (4.8)$$

que é precisamente o movimento browniano geométrico. Dessa forma, o movimento browniano geométrico trata-se de um processo de difusão associado à equação (4.3) (Mikosch 1998, p. 140). Note-se que se obteve a solução da EDE resolvendo uma equação diferencial parcial EDP determinística, mas a solução é uma variável aleatória. Como B_t tem distribuição normal, X_t tem distribuição log-normal.

4.3.2 Exemplo: Equação de Langevin e Processo de Ornstein-Uhlenbeck

A equação de Langevin (1908) modela a velocidade de uma partícula browniana. Escrevendo-a como:

$$X_t = X_0 + \int_0^t c X_s ds + \int_0^t \sigma dB_s, \quad (4.9)$$

temos um caso de ruído aditivo, cuja a solução é o processo

$$X_t = e^{ct} X_0 + \sigma e^{ct} \int_0^t e^{-cs} dB_s. \quad (4.10)$$

Se tivermos uma condição inicial X_0 constante, a função é conhecida como processo de Ornstein-Uhlenbeck, fundamental em modelagem financeira e estatística (Mikosch 1998, p. 141).

4.4 Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais Estocásticas

Muitas vezes, ao resolver uma equação diferencial estocástica (EDE), não é possível encontrar sua solução explícita. Nesses casos, recorremos a métodos numéricos, que são algoritmos iterativos capazes de fornecer um conjunto de pontos que aproximam a trajetória da solução. Como a solução de uma EDE é uma distribuição de probabilidade, a partir das trajetórias obtidas numericamente é possível aproximar a distribuição da solução. Consideramos a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dX_t = a(X_t) dt + b(X_t) dB_t, \quad t \in (0, T). \quad (4.11)$$

Uma solução numérica $X^{(n)} = (X_t^{(n)}, t \in [0, T])$ da equação (4.11) representa uma aproximação de uma trajetória que o processo estocástico pode seguir. A partir de inúmeras trajetórias simuladas, é possível estimar a distribuição que aproxima a solução exata $X = (X_t, t \in [0, T])$.

Para a discretização do intervalo $[0, T]$, consideramos uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, com $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ e $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, para $i = 1, \dots, n$.

4.4.1 Método de Euler (Euler-Maruyama)

O método de Euler-Maruyama fornece a seguinte aproximação numérica para a solução da EDE: Mikosch (1998)(p.159)

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i B. \quad (4.12)$$

4.4.2 Método de Milstein

A aproximação de Milstein melhora a aproximação de Euler para equações diferenciais estocásticas, incorporando um termo corretivo adicional que envolve os incrementos quadráticos do movimento browniano. Partindo da equação diferencial estocástica, a aproximação de Euler considera a discretização dos integrais nos pontos da partição, aproximando $a(X_t)$ e $b(X_t)$ por seus valores nos instantes anteriores. A aproximação de Milstein aplica a expansão de Taylor-Itô aos integrandos, o que leva à inclusão do termo

$$\frac{1}{2}b(X_{t_{i-1}}^{(n)})b'(X_{t_{i-1}}^{(n)})[(\Delta_i B)^2 - \Delta_i], \quad (4.13)$$

que corrige o esquema de Euler, resultando no método

$$X_{t_i}^{(n)} = X_{t_{i-1}}^{(n)} + a(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i + b(X_{t_{i-1}}^{(n)})\Delta_i B + \frac{1}{2}b(X_{t_{i-1}}^{(n)})b'(X_{t_{i-1}}^{(n)})[(\Delta_i B)^2 - \Delta_i]. \quad (4.14)$$

Esse termo adicional decorre da aplicação do lema de Itô e da avaliação de integrais estocásticos duplos, proporcionando maior precisão na simulação de trajetórias estocásticas. Além disso, ele melhora a ordem de convergência em relação ao método de Euler-Maruyama (Mikosch 1998, p. 164).

5 Aplicações do Cálculo Estocástico em Finanças

O desenvolvimento do cálculo estocástico revolucionou a modelagem dos mercados financeiros, proporcionando avanços significativos na compreensão e precificação de ativos de risco. Desde os trabalhos pioneiros de Black, Scholes e Merton na década de 1970, os processos estocásticos tornaram-se ferramentas essenciais para a análise de preços de ações, índices, taxas de câmbio e juros. Nesta seção, exploraremos a derivação da fórmula de Black-Scholes, um dos modelos mais influentes da teoria financeira, aplicado à precificação de opções de compra europeias.

5.1 Modelagem do Preço do Ativo e do Ativo Sem Risco

5.1.1 O Ativo de Risco

Seja X_t o preço de um ativo de risco (por exemplo, uma ação) no tempo t . O modelo adotado é o movimento browniano geométrico, dado pela equação

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right], \quad (5.1)$$

onde:

- X_0 é o preço inicial do ativo;

- $B = (B_t, t \geq 0)$ representa o movimento browniano, que modela as oscilações aleatórias do mercado;
- $\mu > 0$ é uma constante que representa a taxa de retorno, indicando a tendência de crescimento do ativo.
- $\sigma > 0$ é a volatilidade, que mede a intensidade das oscilações aleatórias.

Este modelo é justificado pelo fato de que X_t é a única solução da equação diferencial estocástica (EDS) (4.3) (Mikosch 1998, p. 168).

A interpretação desta equação é a seguinte: no intervalo $[t, t + dt]$, o retorno relativo do ativo é

$$\frac{X_{t+dt} - X_t}{X_t} \simeq \mu dt + \sigma dB_t. \quad (5.2)$$

Aqui, o termo μdt representa o crescimento determinístico, enquanto σdB_t introduz a incerteza inerente ao mercado. Se $\sigma = 0$, teríamos um crescimento exponencial puro, $X_t = X_0 e^{\mu t}$, mas a presença de σ nos leva a modelar flutuações reais observadas nos preços dos ativos.

5.1.2 O Ativo Sem Risco

Em paralelo ao ativo de risco, consideramos um ativo sem risco, tipicamente representado por uma conta bancária ou título público, que rende juros a uma taxa fixa $r > 0$. O montante investido evolui segundo

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt}. \quad (5.3)$$

Note que é solução da EDO

$$\beta_t = \beta_0 + r \int_0^t \beta_s ds. \quad (5.4)$$

Essa idealização simplifica a análise, uma vez que o ativo sem risco apresenta comportamento determinístico e serve de referência para a comparação com ativos de risco (Mikosch 1998, p. 169).

5.2 Composição do Portfólio e Estratégia Autofinanciada

Um investidor geralmente compõe um portfólio diversificando entre ativos de risco e ativos sem risco. Denotamos por a_t a quantidade investida em ações e por b_t a quantidade investida em títulos, de forma que o valor total do portfólio no tempo t , V_t , seja

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t. \quad (5.5)$$

Uma estratégia de investimento é dita autofinanciada se as variações no valor do portfólio decorrem unicamente da evolução dos preços dos ativos, sem a injeção ou retirada

de capital. Matematicamente, essa condição é expressa por

$$dV_t = a_t dX_t + b_t d\beta_t, \quad (5.6)$$

ou, no sentido de Itô,

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t b_s d\beta_s. \quad (5.7)$$

Para o ativo sem risco, note que

$$d\beta_t = r\beta_t dt, \quad (5.8)$$

e, portanto, a alocação em títulos pode ser relacionada ao valor do portfólio pela fórmula

$$b_t = \frac{V_t - a_t X_t}{\beta_t}. \quad (5.9)$$

5.3 Precificação de Opções: Conceitos e Formulação do Problema

As opções são derivativos financeiros cujo valor depende do comportamento de um ativo subjacente, geralmente modelado por equações diferenciais estocásticas. Elas conferem ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de negociar um ativo por um preço pré-determinado K , denominado preço de exercício ou strike, em uma data de vencimento T ou antes dela, dependendo do tipo de opção. Uma opção de venda (put) europeia concede ao titular o direito de vender o ativo subjacente por K na data T , com payoff $(K - X(T))^+$. De forma análoga, uma opção de compra (call) europeia garante o direito de adquirir o ativo pelo preço K em T , com payoff $(X(T) - K)^+$. Quanto à forma de exercício, as opções do tipo europeia só podem ser exercidas na data de vencimento, enquanto as do tipo americana permitem o exercício a qualquer momento até T .

A questão central na precificação de opções é determinar quanto um investidor estaria disposto a pagar hoje ($t = 0$) para adquirir esse direito, considerando que é possível replicar o payoff por meio de uma estratégia de hedge utilizando ativos disponíveis no mercado (Mikosch 1998, p. 170). Com base nos fundamentos de finanças discutidos em Hull (2016), o valor justo de uma opção depende de fatores como a volatilidade σ do ativo, a taxa de juros livre de risco r , o preço inicial X_0 e o tempo até o vencimento T . Matematicamente, a precificação corresponde ao cálculo do valor esperado do payoff futuro, descontado à taxa livre de risco.

5.3.1 Formulação do Problema de Precificação

Para replicar o payoff da opção, suponha que existe uma função determinística e suave $u(t, x)$ tal que o valor do portfólio no tempo t possa ser escrito como

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t = u(T - t, X_t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.10)$$

Essa hipótese implica que o valor do portfólio depende de forma contínua e diferenciável do tempo e do preço do ativo. A condição terminal, ou seja, o valor do portfólio no vencimento T , deve coincidir com o payoff da opção:

$$u(0, x) = (x - K)^+, \quad x > 0. \quad (5.11)$$

Dessa forma, o problema consiste em encontrar a função $u(t, x)$ que, quando avaliada em $t = T$ e no preço atual X_0 , fornece o valor justo da opção (Mikosch 1998, p. 172):

$$V_0 = u(T, X_0). \quad (5.12)$$

5.4 Derivação da Equação de Black–Scholes

Para determinar $u(t, x)$, aplicamos o lema de Itô à função composta

$$f(t, x) = u(T - t, x),$$

lembrando que as derivadas de f relacionam-se com as de u por

$$f_1(t, x) = -u_1(T - t, x), \quad f_2(t, x) = u_2(T - t, x), \quad f_{22}(t, x) = u_{22}(T - t, x).$$

Dado que o ativo X_t segue a dinâmica (4.3),

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s, \quad (5.13)$$

podemos aplicar uma extensão do lema de Itô, conforme visto em Mikosch (1998) (p. 120), resultando na seguinte igualdade

$$\begin{aligned} V_t - V_0 &= f(t, X_t) - f(0, X_0) \\ &= \int_0^t [f_1(s, X_s) + \mu X_s f_2(s, X_s) + 0.5 \sigma^2 X_s^2 f_{22}(s, X_s)] ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma X_s f_2(s, X_s)] dB_s \\ &= \int_0^t [-u_1(T - s, X_s) + \mu X_s u_2(T - s, X_s) + 0.5 \sigma^2 X_s^2 u_{22}(T - s, X_s)] ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma X_s u_2(T - s, X_s)] dB_s. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Por outro lado, utilizando a condição de autofinanciamento da estratégia (5.7), e, substituindo $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$ e $d\beta_t = r\beta_t dt$, junto com a relação (5.9), chega-se à expressão

$$V_t - V_0 = \int_0^t [(\mu - r)a_s X_s + rV_s] ds + \int_0^t [\sigma a_s X_s] dB_s. \quad (5.15)$$

Ao comparar as expressões (5.14) e (5.15), observamos que os coeficientes dos termos em ds e dB_s devem ser iguais, uma vez que ambas as representações descrevem o mesmo movimento do portfólio. Dessa comparação, obtemos a identificação imediata:

$$a_t = u_2(T - t, X_t), \quad (5.16)$$

$$(\mu - r)a_t X_t + ru(T - t, X_t) = (\mu - r)u_2(T - t, X_t)X_t + ru(T - t, X_t)$$

$$= -u_1(T - t, X_t) + \mu X_t u_2(T - t, X_t) + 0.5\sigma^2 X_t^2 u_{22}(T - t, X_t).$$

Impondo a igualdade dos termos determinísticos para qualquer valor de $X_t > 0$, obtemos a seguinte equação diferencial parcial:

$$u_1(t, x) = 0.5\sigma^2 x^2 u_{22}(t, x) + rxu_2(t, x) - ru(t, x), \quad x > 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5.17)$$

Ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + rx \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - ru(t, x), \quad (5.18)$$

definida para $x > 0$ e $t \in [0, T]$, sujeita à condição terminal (5.11).

Esta PDE, conhecida como equação de Black–Scholes, encapsula a dinâmica do valor da opção sob a hipótese de ausência de arbitragem e de replicação perfeita por meio de uma estratégia autofinanciada.

5.4.1 Solução da Equação de Black–Scholes e a Fórmula de Precificação

Observa-se que a equação (5.18) admite uma solução explícita. Conforme Mikosch (1998, p. 174), a solução da PDE, com a condição terminal (5.11), é dada por

$$u(t, x) = x \Phi(g(t, x)) - Ke^{-rt} \Phi(h(t, x)), \quad (5.19)$$

onde

$$g(t, x) = \frac{\ln(x/K) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma t^{1/2}}, \quad (5.20)$$

$$h(t, x) = g(t, x) - \sigma t^{1/2}, \quad (5.21)$$

e

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.22)$$

representa a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Portanto, o valor justo da opção europeia com preço de exercício K no tempo $t = 0$ é

$$V_0 = u(T, X_0) = X_0 \Phi(g(T, X_0)) - Ke^{-rT} \Phi(h(T, X_0)), \quad (5.23)$$

e a função $u(T - t, X_t)$ fornece o valor do portfólio que, através de uma estratégia de hedge, replica exatamente o payoff $(X_T - K)^+$ no vencimento.

Além disso, a estratégia de hedge é definida pelas quantidades

$$a_t = u_2(T - t, X_t) \quad \text{e} \quad b_t = \frac{u(T - t, X_t) - a_t X_t}{\beta_t}, \quad (5.24)$$

garantindo que a carteira se mantenha autofinanciada e que os ganhos (ou perdas) decorrentes dos movimentos do mercado sejam idênticos aos da opção. A fórmula de Black-Scholes mostra que o preço da opção é independente da taxa de retorno μ , pois a estratégia de hedge ("proteção") elimina o risco, dependendo apenas da volatilidade σ , da taxa livre de risco r , do preço de exercício K e do tempo até o vencimento T , fundamentando a precificação na ausência de arbitragem e no equilíbrio de mercado.

6 Simulações

Nesta seção apresentamos a aplicação de métodos de simulação para a precificação de opções europeias e americanas, comparando os resultados com os valores teóricos e avaliando a eficiência dos métodos. Os algoritmos foram implementados em Python (Google Colab) e o repositório encontra-se em Freiria (2025).

6.1 Opções Europeias

Para a precificação de opções europeias, utilizou-se o método de Monte Carlo por meio de quatro diferentes abordagens, com o objetivo de comparar os resultados obtidos com a solução analítica fornecida pelo modelo de Black-Scholes. As trajetórias necessárias para a aplicação do método serão geradas por simulação direta do movimento browniano geométrico, com e sem o uso de variáveis antitéticas, bem como pela solução da equação diferencial estocástica (EDE) utilizando os métodos de Euler e de Milstein. A equação diferencial de Black-Scholes-Merton não depende das preferências de risco, pois o retorno esperado μ da ação desaparece de sua derivação. Isso permite adotar o pressuposto de que todos os investidores são neutros ao risco (risk-neutral). Nesse cenário, o retorno esperado de qualquer ativo é igual à taxa livre de risco r , pois não é exigido prêmio pelo risco Hull (2016, p. 357). Consequentemente, o valor presente de um fluxo de caixa é obtido descontando seu valor esperado a r , o que simplifica a análise e a precificação de derivativos.

Embora o modelo de Black-Scholes ofereça uma solução analítica para o preço de opções europeias, neste trabalho empregamos simulações Monte Carlo para demonstrar sua eficácia. A evolução do ativo é dada por Hull (2016, p. 508):

$$X(t + \Delta t) = X(t) \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right], \quad (6.1)$$

onde $X(0)$ é o valor inicial, μ a taxa livre de risco, σ a volatilidade e $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$. A partir de $X(0)$, é possível simular a trajetória do ativo ao longo do tempo, utilizando incrementos

do movimento browniano padrão B_t em intervalos Δt , representados como $\Delta B_t = \epsilon\sqrt{\Delta t}$. Assim, cada passo de tempo incorpora a componente aleatória necessária para a simulação Monte Carlo, permitindo gerar diferentes cenários para o preço do ativo.

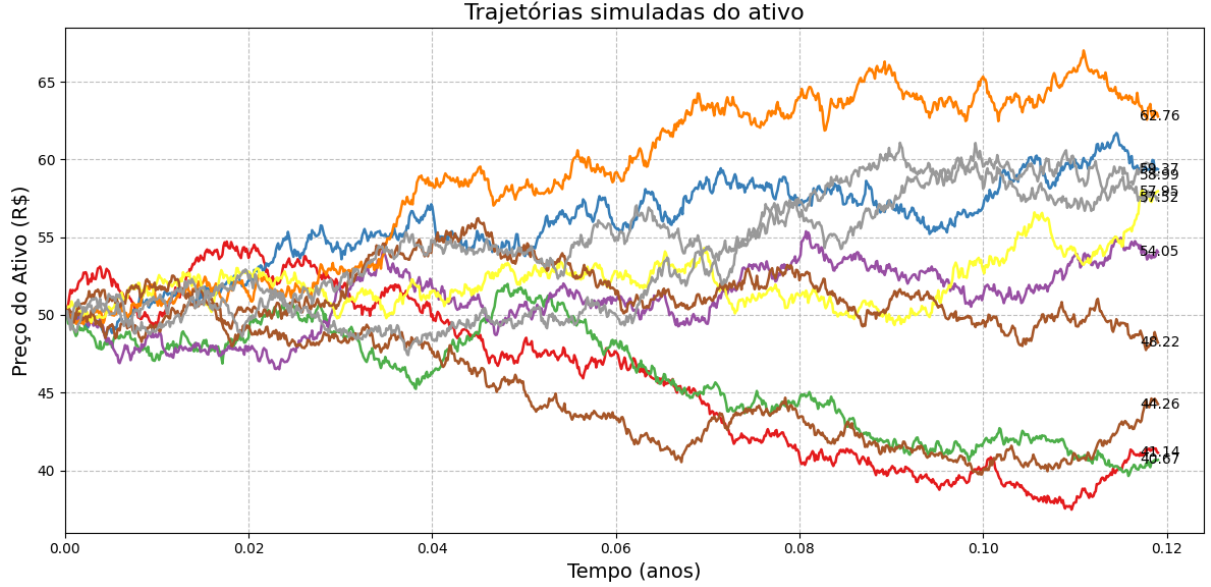


Figura 1 – Simulações de 10 trajetórias do movimento Browniano geométrico, com os parâmetros: preço inicial $X_0 = 50$, $\sigma = 0.4$ e $\mu = 0.1$.

6.1.1 Metodologia do Método de Monte Carlo

Para aplicar o método de Monte Carlo à precificação da opção, geramos diversas trajetórias do preço do ativo no tempo T , utilizando a equação de precificação sob a medida neutra ao risco (6.1). Em cada trajetória, calculamos o payoff da opção europeia de compra, dado por $\max(X(T) - X, 0)$, na data de vencimento. Em seguida, obtemos a média dos payoffs simulados e a descontamos ao valor presente utilizando a taxa de juros r . A ideia central do método consiste em estimar o valor esperado de uma variável aleatória por meio da média aritmética de uma sequência de realizações independentes dessa variável. A fundamentação teórica apoia-se na Lei dos Grandes Números, cujo enunciado pode ser consultado no Teorema 2.1.1 de Silva (2012). Quanto menor for o Δt melhor serão as aproximações das trajetórias, e quanto maior o número de trajetórias, melhor serão as estimativas da média da distribuição.

6.1.2 Redução de Variância: Variáveis Antitéticas

A redução da variância é essencial no método de Monte Carlo, pois permite obter intervalos de confiança mais estreitos e estimativas mais precisas. Uma técnica amplamente utilizada é o uso de variáveis antitéticas, que Silva (2012) define como um par (X, Y) de variáveis aleatórias com a mesma distribuição, mas correlação negativa. Nesse caso, valores

altos de uma tendem a ser acompanhados de valores baixos da outra, e vice-versa. Para entender a redução da variância por variáveis antitéticas, analisamos a variância da média aritmética de um par (X, Y) antitético, dada por:

$$\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{4}(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)) = \frac{1}{2}(\text{Var}(X) + \text{Cov}(X, Y))$$

Como X e Y são negativamente correlacionados, temos que $\text{Cov}(X, Y) \leq 0$, o que resulta em:

$$\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\text{Var}(X)$$

Portanto, ao utilizar pares antitéticos, a variância da média será menor do que a variância de X ou Y individualmente. Além disso, $\frac{1}{2}\text{Var}(X)$ é a variância da média entre X e Y , quando elas forem independentes. Essa redução de variância é especialmente útil em simulações de preços de ativos, onde o valor do ativo X_t é modelado pela equação:

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) = X_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}z\right)$$

Nesse contexto, busca-se reduzir a variância da função $\exp(z)$, onde $z \sim N(0, 1)$.

Como $\exp(x)$ é uma função monótona crescente, segue que $-\exp(-x)$ também apresenta monotonicidade crescente. Pelo Lema 2.2.1 de Silva (2012), que estabelece que, se f e g são funções monótonas crescentes, então, para qualquer variável aleatória X , vale $\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$. A partir disso, podemos deduzir a relação $\text{Cov}(\exp(x), -\exp(-x)) \geq 0$ e, conseqüentemente, $\text{Cov}(\exp(x), \exp(-x)) \leq 0$. Isso significa que as funções $\exp(z)$ e $\exp(-z)$ são variáveis antitéticas. Em outras palavras, podemos garantir que $\exp(-z)$ é a variável antitética de $\exp(z)$, o que permite reduzir a variância ao utilizar essas duas variáveis em simulações de Monte Carlo.

6.1.3 Exemplo de aplicação

Como no caso das opções europeias existe uma solução analítica, é possível verificar diretamente o desempenho do método de estimação por simulação. Como exemplo, considere uma opção de compra com os seguintes parâmetros: $X_0 = 50$, $K = 45$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.1$. O preço teórico da opção, calculado pela fórmula de Black-Scholes (5.25), é de R\$ 6.248. Na simulação, adotou-se $T = 30/252$, que corresponde ao tamanho do passo Δt nas equações (4.12) e (4.14). Considerando um ano com 252 dias úteis, a escolha do número de passos seguiu os mesmos parâmetros, variando apenas o número de passos, como ilustrado na Tabela 1. Observa-se que, à medida que o número de passos aumenta, a aproximação do preço teórico melhora. Um número de 1000 passos é considerado adequado,

pois proporciona boa precisão com custo computacional razoável, evitando tempos de cálculo excessivos com valores maiores.

Tabela 1 – Preços estimados da opção (em R\$) por diferentes métodos e números de passos. Preço teórico R 6.248. Simulações realizadas com $M = 100000$ trajetórias. Entre parênteses temos os erros padrões das estimativas do preço.

Método	Número de Passos		
	10	100	1000
GBM	6.198 (0.019)	6.227 (0.019)	6.237 (0.019)
Euler	6.261 (0.019)	6.262 (0.019)	6.254 (0.019)
Milstein	6.264 (0.019)	6.223 (0.019)	6.235 (0.019)

Para estudar o efeito do número de trajetórias, consideramos (100, 1000, 10000, 100000) trajetórias. O preço teórico da opção, pela fórmula de Black–Scholes, foi de R\$ 6.2476. O ativo foi modelado por uma equação diferencial estocástica (EDE), cuja solução analítica é o movimento Browniano geométrico (MBG), expresso na equação (4). As trajetórias são simuladas e o método de Monte Carlo (MC) é aplicado. A Tabela 2 apresenta os resultados baseados em diferentes número de trajetórias. São apresentados os resultados quando as trajetórias foram geradas pelos métodos Euler–Maruyama e Milstein. Adicionalmente, as variáveis antitéticas utilizadas foram as utilizadas em Silva (2012, seção 2.2.1). Para se ter uma ideia das incertezas nas amostras dadas pelas trajetórias, em MC (MBG) consideramos amostras da distribuição verdadeira no final do período dada pela equação (5.1). Em MC (Antitético) são dadas as mesmas estimativas dadas em MC (MBG) quando são utilizadas variáveis antitéticas.

A análise dos resultados indica que: i) Em todos os casos as diferenças entre os valores estimados são menores do que dois erros padrões; ii) os erros padrões dos métodos de Euler-Maruyama e Milstein são próximos dos desvios padrões das estimativas MC (MBG); iii) o método de redução de variância, que utiliza variáveis antitéticas reduz bastante o erro padrão; e iv) o método de Milstein teve desempenho ligeiramente superior ao de Euler–Maruyama.

Tabela 2 – Preços estimados da opção (em R\$) por diferentes métodos e números de trajetórias. Preço teórico: R\$ 6.248. Entre parênteses temos os erros padrões das estimativas do preço estimado.

Método	Número de Trajetórias			
	100	1000	10000	100000
MC (MBG)	6.441 (0.615)	6.395 (0.190)	6.210 (0.060)	6.241 (0.019)
MC (Antitético)	6.310 (0.171)	6.259 (0.060)	6.287 (0.019)	6.248 (0.006)
MC (Euler–Maruyama)	6.539 (0.563)	6.084 (0.192)	6.134 (0.059)	6.274 (0.019)
MC (Milstein)	6.046 (0.533)	6.053 (0.186)	6.287 (0.059)	6.259 (0.019)

6.2 Opções americanas

6.2.1 Algoritmo de Longstaff e Schwartz

O algoritmo proposto por Longstaff e Schwartz (2001) apresenta uma abordagem eficiente e relativamente simples para a precificação de opções americanas. A principal inovação desse método está na aplicação de uma regressão por mínimos quadrados para estimar o valor esperado condicional do payoff futuro, considerando que o titular da opção faça a escolha racional de mantê-la ativa. Essa característica torna o algoritmo particularmente útil em contextos onde o valor da opção depende do histórico do ativo subjacente, como ocorre com as opções americanas. O método é implementado de forma retroativa, utilizando simulações de Monte Carlo para gerar os caminhos dos preços do ativo e, em seguida, aplicando regressões para aproximar o valor de continuação ao longo do tempo. Os passos do método, conforme descrito em Silva (2012), consideram que $(X_1^j, \dots, X_M^j)$ são os preços do ativo no caminho j no instante i , Z_i^j é o valor intrínseco, r_i a taxa de juros entre os tempos i e $i + 1$, e U_i^j representa o preço da opção.

Gere os caminhos $(X_1^j, \dots, X_M^j)$ para $j = 1, \dots, N$ e defina uma base de funções $e = (e^1, \dots, e^m)$. Para cada $j = 1, \dots, N$, defina o valor da opção no vencimento como $U_M^j = Z_M^j$. Em seguida, para $i = N - 1, \dots, 1$, obtenha o vetor $\alpha^*(i)$ resolvendo o problema de regressão linear da equação (3.2.1) de Silva (2012), calcule $E(Z_{i+1}^j | X_i^j) = \langle \alpha^*(i), e \rangle$ e defina

$$U_i^j = \begin{cases} Z_i^j, & \text{se } Z_i^j \geq E(Z_{i+1}^j | X_i^j), \\ \exp(-r_i) U_{i+1}^j, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por fim, o valor estimado da opção é dado por $\hat{U} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N U_1^j$.

6.2.2 Exemplo de aplicação

Com base em Silva (2012), apresentamos os resultados do método de Longstaff-Schwartz (LSM) para a precificação de opções americanas de compra, conforme proposto originalmente em Longstaff e Schwartz (2001). As simulações foram realizadas para a mesma opção ilustrada em Silva (2012, seção 3.2.3), isto é, com preços iniciais $X_0 = 28, 30, 32$, taxa de juros de 5% ao ano, vencimento em 1 ano, preço de exercício de 30 e volatilidades de 10%, 20% e 40%. Assim como em Silva (2012), foram utilizadas 100.000 trajetórias em cada simulação de Monte Carlo, com 50 datas de exercício e para a base de funções, utilizou-se a de Laguerre, pois são as mesmas empregadas pelos criadores do método, com dimensão da base igual a 4.

Foi realizado o mesmo experimento de Silva (2012, seção 3.2.3) para seleção das funções base. Para tanto, é utilizado o fato de que o preço de uma opção americana sem pagamento de dividendos coincide com o de sua correspondente europeia, que como vimos, tem solução analítica. Comparando os preços estimados pelo (LSM), constatamos que

a dimensão 4 das funções de Laguerre foi suficiente para uma boa aproximação. Como forma de verificação dos resultados obtidos pelo algoritmo implementado, foram utilizados como referência os valores apresentados na Tabela 3.3 da dissertação de Silva (2012), tanto para o método de Longstaff-Schwartz (LSM) quanto para o método binomial, ambos empregados na precificação de opções na referida obra.

Os resultados deste projeto foram comparados com os de Silva (2012, seção 3.2.3), que utilizou os métodos LSM e binomial para precificação de opções. Os valores obtidos foram próximos, como mostrado na Tabela 3, evidenciando a confiabilidade dos algoritmos implementados. Os valores obtidos pelo método binomial servem como referência, e observa-se que, em alguns casos, os resultados apresentados por Silva (2012, seção 3.2.3) são superiores aos encontrados na nossa implementação e, em outros, inferiores.

Tabela 3 – Preços estimados de opções americanas pelo método de Longstaff-Schwartz com 100.000 trajetórias, para diferentes volatilidades (σ) e valores iniciais (X_0). Na coluna LSMP, estão os valores simulados; nas colunas Silva (LSM) e Binomial, os valores apresentados em Silva (2012).

σ	$X_0 = 30$			$X_0 = 28$			$X_0 = 32$		
	LSMP	Silva	Binomial	LSMP	Silva	Binomial	LSMP	Silva	Binomial
0.1	0.724	0.725	0.731	1.994	1.989	2.005	0.221	0.209	0.223
0.2	1.828	1.827	1.827	2.807	2.816	2.815	1.147	1.136	1.145
0.4	4.084	4.100	4.100	4.952	4.961	4.962	3.367	3.363	3.379

7 Conclusões

O projeto forneceu uma base sólida nos fundamentos teóricos e computacionais da modelagem estocástica de preços de ativos financeiros, abordando a aplicação do Lema de Itô para a solução analítica da EDE (movimento browniano geométrico) e métodos numéricos de discretização, como Euler-Maruyama e Milstein, para a simulação de processos de difusão.

Na precificação, utilizou-se o método de Monte Carlo para estimar o valor de opções europeias, validado pela fórmula de Black-Scholes. O uso de variáveis antitéticas foi eficaz na redução da variância, melhorando a precisão das estimativas. Para opções americanas, foi utilizado o método de Longstaff-Schwartz, que combina simulações de Monte Carlo com regressões por quadrados mínimos para estimar o exercício ótimo.

O projeto também contribuiu para o desenvolvimento da intuição financeira e da autonomia computacional. Como continuidade, propõem-se expandir o estudo para opções exóticas e aprofundar o controle estocástico, com foco em alocação ótima de portfólio.

Referências

- Freiria, Guilherme Valverde (2025). *Simulações IC PIBIC 2025*. <https://github.com/g270535-art/Simulacoes_IC_PIBIC2025/blob/e4a3c6ded12b4676469a638c0050509b5991ee76/Simula%C3%A7%C3%B5es_IC_2025.ipynb>. Acesso em: 15 ago. 2025.
- Hull, John C (2016). *Opções, Futuros e Outros Derivativos*. 9^a ed. Porto Alegre: Bookman Editora.
- Longstaff, Francis A e Eduardo S Schwartz (2001). “Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach”. Em: *The Review of Financial Studies* 14.1, pp. 113–147.
- Mikosch, Thomas (1998). *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*. Singapore: World Scientific.
- Silva, Bruno E. da (2012). “Opções Americanas Via Métodos de Monte Carlo”. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: Mestrado Profissional de Métodos Matemáticos Aplicados a Finanças, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.