



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



MARIANE ALBINO ZACARIAS DE SANTANA - 241361

Estudo sobre economia da sustentabilidade no país

Campinas
20/10/2025



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



MARIANE ALBINO ZACARIAS DE SANTANA

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para obtenção de créditos na disciplina Projeto Supervisionado, sob a orientação do(a) Prof. João Frederico da Costa Azevedo Meyer.

Campinas
2025

Resumo

A economia da sustentabilidade emerge como campo transdisciplinar essencial para enfrentar os complexos desafios socioambientais do século XXI. No contexto brasileiro, caracterizado por megadiversidade e significativas desigualdades sociais, a integração entre modelagem matemática e economia ecológica oferece ferramentas poderosas para a tomada de decisão.

O trabalho a ser desenvolvido envolve integrar os princípios da ecologia e biomatemática à economia promovendo assim um desenvolvimento verdadeiramente sustentável. O grande diferencial desta área é que ela não vê o meio ambiente como um subsetor da economia, mas a economia como um subsistema do meio ambiente, que é finito (Herman Daly).

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Pesquisas de temas relevantes	2
2.1	Modelagem de Migração Climática de Espécies e Impacto em Cadeias Produtivas	2
2.2	Modelo de Produtividade do Café sob Estresse Térmico e Hídrico	4
2.3	Modelo Econômico da Cafeicultura	5
2.4	Cenários de Aquecimento Global	5
2.5	Dinâmica de Populações de Polinizadores e Segurança Alimentar	6
2.6	Ferramentação Matemática	6
2.6.1	A Estrutura da Rede: Matrizes de Interação	8
2.7	Matriz de Benefício dos Polinizadores (β)	8
2.8	Padrões de Rede	8
3	Resultados	10
3.0.1	Implementação do Modelo de Difusão-Reação	10
3.0.2	Códigos Python dos modelos matemáticos	13
3.0.3	Implementação do Modelo de lucro 3D em função da Temperatura vs Umidade	22
4	Conclusão	25

1 Introdução

A sustentabilidade é profundamente influenciada pelo bioma, cultura, economia local e arranjos institucionais. Uma solução para a Caatinga não serve para o Pantanal e soluções "feitas sob medida" são o ideal para aplicar modelagem matemática, seja qual for o problema a região escolhida é mais tangível e factível estudar, propor e implementar projetos em uma escala regional ou municipal.

É importante ressaltar que para o esse estudo em biomatemática há o envolvimento da compreensão das áreas de Aquecimento global, Dinâmicas de Populações, Epidemiologia e Impacto Ambiental sendo necessárias afim de se obter uma valoração ou adotar medidas específicas para problemas específicos estudados.

Num panorama Nacional isso permite entender tendências macroeconômicas e estruturas que afetam todo o país tendo como impacto amplo a adoção de políticas ou modelos de negócio desenvolvidos numa perspectiva nacional, que podem ser replicados ou adaptados e potencialmente atingindo mais pessoas.

2 Pesquisas de temas relevantes

A seguir serão mostrados alguns temas relevantes pesquisados sobre como a economia da sustentabilidade se aplica no país e como pode-se desenvolver a pesquisa sobre regiões brasileiras.

2.1 Modelagem de Migração Climática de Espécies e Impacto em Cadeias Produtivas

Regiões como Serra Gaúcha ou Região Sul de Minas Gerais são regiões produtoras de culturas sensíveis ao clima (como a maçã e o café arábica, respectivamente). Um aumento de temperatura pode tornar áreas impróprias para o café arábico, deslocando a cultura para regiões mais altas, e ao mesmo tempo permitir que pragas antes restritas a regiões mais quentes se estabeleçam.

Segundo a EMBRAPA [3], o café arábico domina os mercados nacionais e internacionais, em que o Brasil é líder e dados do Observatório do café [5] mostram que o faturamento bruto dos cafés em 2023 ficou em quase 50 bilhões, sendo então é uma das commodities mais importantes do Brasil. Mas em quesitos climáticos, ele é extremamente sensível a temperaturas acima de 23°C que aceleram seu metabolismo, prejudicam a floração e a granação dos grãos reduzindo a qualidade e a produtividade.

Dado um cenário de aumento de temperatura de 2°C até 2050 é necessária a combinação mais custo-efetiva de estratégias de adaptação para manter a rentabilidade da cafeicultura no Sul de Minas.

Segundo [4] a **Modelagem da Migração Climática de Espécies** estuda como as mudanças no clima forçam a migração de organismos e os impactos nas cadeias produtivas incluem perdas de produção agrícola devido a eventos climáticos extremos, alterações na disponibilidade de recursos hídricos e riscos à segurança alimentar e econômica.

Ao analisar dados como aumento da temperatura e mudanças nos padrões de chuva, esses modelos preveem a redistribuição das espécies, o que pode levar a desequilíbrios ecológicos, extinção local, mudanças no uso da terra e à necessidade de adaptação na agricultura para garantir a sustentabilidade da produção.

A modelagem preditiva de distribuição de espécies [2] é um método computa-

cional que constrói uma representação das condições requeridas para a sobrevivência de uma ou mais espécies, por meio da combinação de dados de ocorrência com variáveis ambientais. Na **Ecologia Matemática** são utilizados modelos de distribuição de espécies (Species Distribution Models - SDMs) usando equações de difusão-reação para prever deslocamento de espécies devido ao aquecimento global, incorporando fatores como dispersão e mudanças ambientais (reação). Esses modelos combinaram o movimento físico das espécies com a forma como as condições ambientais afetam sua sobrevivência e reprodução (reação) para projetar como sua distribuição potencial mudará no futuro. [2] A difusão representa o movimento das espécies de um local para outro, a sua dispersão, a reação pode exibir um modelo de como as condições ambientais, como temperatura, umidade e disponibilidade de recursos, influenciam a capacidade de uma espécie sobreviver, se reproduzir e se estabelecer em um novo local.

A descoberta de difusão-reação combina essas duas forças. Ela descreve como a densidade populacional de uma espécie muda ao longo do tempo e do espaço, considerando tanto a sua capacidade de se espalhar quanto a adequação do ambiente para sua sobrevivência. Os modelos de dinâmica de populações [13] estudam um subtema, a dinâmica de metapopulações para entender como populações fragmentadas se conectam ou se isolam em escalas espaciais mais amplas. Porém, o modelo de dinâmica metapopulacional foi pensado segundo experiências com dinâmica de fauna, sendo fundamental a extensão deste modelo para outros tipos de dinâmica regional que incorporem os problemas específicos associados ao estudo de plantas. Idéias de “populações espacialmente expandidas” (‘spatially extended populations’) e de “conjuntos regionais de populações” (‘regional ensemble’) foram propostas no intuito de compreender a dinâmica regional de plantas. Podemos aplicar isso a um modelo de produtividade do café sob estresse térmico e hídrico prevendo a produtividade (sacas/hectare) em função do clima, explicando como modelo uma função de crescimento modificada por fatores de estresse.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\nabla^2 N - \nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)N] + rN \left(1 - \frac{N}{K(\mathbf{x}, t)}\right) \quad (1)$$

onde:

- $N(\mathbf{x}, t)$: densidade da espécie no espaço \mathbf{x} e tempo t

- D : coeficiente de difusão (dispersão aleatória)
- $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$: velocidade de advecção (movimento direcionado pelo clima)
- r : taxa de crescimento intrínseco
- $K(\mathbf{x}, t)$: capacidade de suporte do ambiente, que pode variar com o clima.

2.2 Modelo de Produtividade do Café sob Estresse Térmico e Hídrico

Um modelo de produtividade do café sob estresse térmico e hídrico se baseia na análise de como o aumento da temperatura e a falta de água afetam a planta, prejudicando a fotossíntese e causando queda na produção. Com a variedade no calor, como o café Arábico acima de 22°C , o impacto de perdas de água e deficiência hídrica pode reduzir a produtividade em comparação com condições ideais. O estresse hídrico e térmico pode levar a uma perda de até 95% de área plantável adequada para o café em algumas regiões, impactando diretamente o rendimento por hectare. Pode-se prever a produtividade (sacas/hectare) em função do clima, explicando como modelo uma função de crescimento modificada por fatores de estresse.

$$\text{Produtividade} = P_{\max} \cdot f(T) \cdot g(\text{ETC}) \quad (2)$$

P_{\max} : Produtividade potencial na região (sacas/ha)

$f(T)$: Função de Resposta à Temperatura (crítica), pode ser uma função Gaussiana ou quadrática que maximiza em $\sim 22^\circ\text{C}$ e cai drasticamente acima de 30°C e abaixo de 15°C

$$f(T) = \exp \left(-0.5 \cdot \left(\frac{T - T_{\text{opt}}}{T_{\text{tol}}} \right)^2 \right) \quad (3)$$

$g(\text{ETC})$ representa a função de resposta hídrica. É a relação entre a Evapotranspiração Real (ETA) e a Evapotranspiração da Cultura (ETC).

$$g(\text{ETC}) = \frac{\text{ETA}}{\text{ETC}} \quad (\text{valor entre 0 e 1, onde 1 significa sem estresse hídrico}) \quad (4)$$

2.3 Modelo Econômico da Cafeicultura

Baseado na abordagem de colheita sustentável de [9] (Seção 1.6), o lucro líquido da cafeicultura pode ser modelado como:

$$L(t) = p \cdot P(T, W) - c \cdot E - A(T) \quad (5)$$

onde: p é o preço por saca de café, c o custo unitário do esforço de produção, E o esforço de produção e $A(T)$ os custos de adaptação ao aumento de temperatura. A seguir foi gerado um mapa de calor sobre esse modelo:

2.4 Cenários de Aquecimento Global

Essa é uma decomposição típica em análise de séries temporais de campos espaciais, considerando o cenário de aumento de 2°C até 2050 [10], modelamos a temperatura como:

$$T(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}) + \Delta T(t) + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

onde $\Delta T(t)$ representa o aquecimento global e $\eta(\mathbf{x}, t)$ a variabilidade espacial.

$T(\mathbf{x}, t)$ é o campo de temperatura no ponto \mathbf{x} e no tempo t , $T_0(\mathbf{x})$ é a temperatura média espacial no ponto \mathbf{x} , independente do tempo, $\eta(\mathbf{x}, t)$ é o resíduo ou flutuação espacialmente heterogênea, dependente de \mathbf{x} e t .

2.5 Dinâmica de Populações de Polinizadores e Segurança Alimentar

Poucas plantas têm a capacidade de autopolinização [11], a grande maioria depende de animais, do vento ou de água para se reproduzir. A população de polinizadores que se baseiam em abelhas, morcegos, pássaros lagartos, etc, procuram o néctar das flores. A contribuição dos polinizadores para a agricultura brasileira é extremamente importante.

As abelhas são os principais polinizadores de plantas nativas e cultivadas, estima-se que o serviço de polinização realizado por elas agregue nada menos do que 43 bilhões por ano à agricultura [12]. Esses agentes enfrentam riscos em um mundo de mudanças com a perda de seus habitats, o uso de pesticidas e as mudanças climáticas estão ameaçando sua existência. Isso tem implicações diretas na segurança alimentar, pois o declínio dos polinizadores pode reduzir a qualidade e produtividade das colheitas, levando à escassez e ao aumento de preço dos alimentos. [1] É crucial compreender como esses polinizadores interagem em ambientes naturais, com as mudanças em seus habitats e consequentemente com os agrossistemas.

Dado o contexto do país e dimensões, é de extrema importância estudar regiões como Chapada Diamantina ou Oeste da Bahia, regiões de grande produção de frutas e grãos como manga, soja, algodão que dependem criticamente de polinizadores.

2.6 Ferramentação Matemática

Modelos de ecologia matemática como o de dinâmica de populações, ajudam a estudar como as ações climáticas e uso de pesticidas afetam a polinização natural. Para quantificar esses impactos e prever cenários futuros, modelos matemáticos de dinâmica de populações se mostram ferramentas essenciais, através de modelos de redes mutualísticas (plantas-polinizadores) acoplados a modelos de crescimento de culturas e modelos de dinâmica populacional para abelhas, estudar o efeito de pesticidas e da mudança climática na fragmentação de habitat e sobrevivência de colônias pode nos levar a um entendimento sobre economia da sustentabilidade, ou seja, a partir desses modelos podemos estudar sobre valoração econômica do serviço de polinização para a agricultura, custo de reposição com a polinização manual e a análise de políticas de PSA para conservação de habitats

de polinizadores.

O modelo de partida é uma extensão do clássico modelo predador-presa para descrever a interação mutualística entre duas espécies.

Para uma espécie de planta P e uma espécie de polinizador A :

$$\frac{dP}{dt} = r_P P \left(1 - \frac{P}{K_P} \right) + \alpha_{PA} AP \quad (7)$$

$$\frac{dA}{dt} = r_A A \left(1 - \frac{A}{K_A} \right) + \alpha_{AP} PA \quad (8)$$

Em que P , A é densidade populacional de plantas e polinizadores, respectivamente; r_P / r_A são as taxas de crescimento intrínseco, K_P / K_A são as capacidades de suporte do ambiente (na ausência do mutualista); α_{PA} é o benefício que a planta recebe por unidade de polinizador (como por exemplo o aumento na taxa de reprodução via sucesso de polinização); e α_{AP} é o benefício que o polinizador recebe por unidade de planta (ex: acesso a néctar/pólen, aumentando a taxa de reprodução)

Este modelo bilateral é instável, se os benefícios (α) forem muito grandes as populações crescem infinitamente o que é biologicamente irrealista. Isso levou ao desenvolvimento de modelos com saturação. O modelo abaixo é mais realista, pois assume que o benefício que uma espécie recebe de seu mutualista satura conforme a população do mutualista aumenta se por exemplo uma abelha só pode visitar um número limitado de flores por dia.

Para S_P espécies de plantas e S_A espécies de polinizadores:

$$\frac{dP_i}{dt} = r_i P_i \left(1 - \frac{P_i}{K_i} \right) + \sum_{j=1}^{S_A} \frac{\alpha_{ij} A_j P_i}{1 + h \sum_{k=1}^{S_A} \alpha_{ik} A_k} \quad (9)$$

$$\frac{dA_j}{dt} = r_j A_j \left(1 - \frac{A_j}{K_j} \right) + \sum_{i=1}^{S_P} \frac{\beta_{ji} P_i A_j}{1 + h \sum_{k=1}^{S_P} \beta_{jk} P_k} \quad (10)$$

P_i é a densidade populacional da planta da espécie i ; A_j é a densidade populacional do polinizador da espécie j , S_P / S_A é o número total de espécies de plantas e polinizadores, respectivamente. α_{ij} é a taxa de benefício específica que a planta i recebe do polinizador j ; β_{ji} é a taxa de benefício específica que o polinizador j recebe da planta

i e h é o tempo de manipulação ou parâmetro de saturação (controla quão rapidamente o benefício se satura).

Os termos de soma (\sum) são o coração do modelo de rede, eles mostram que o benefício total para uma planta i depende de todas as espécies de polinizadores j com as quais ela interage (e vice-versa) e a força de cada interação é ponderada pelo parâmetro α_{ij} (ou β_{ji}).

2.6.1 A Estrutura da Rede: Matrizes de Interação

A topologia da rede (quem interage com quem e com que força) é encapsulada em duas matrizes:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1S_A} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2S_A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{S_P1} & \alpha_{S_P2} & \cdots & \alpha_{S_P S_A} \end{bmatrix} \quad (11)$$

A **linha i** : mostra todos os benefícios que a planta i recebe de cada polinizador e a **coluna j** : mostra todos os benefícios que cada planta recebe do polinizador j .

2.7 Matriz de Benefício dos Polinizadores (β)

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1S_P} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2S_P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{S_A1} & \beta_{S_A2} & \cdots & \beta_{S_A S_P} \end{bmatrix} \quad (12)$$

linha j : Mostra todos os benefícios que o polinizador j recebe de cada planta.

2.8 Padrões de Rede

Se a matriz α for altamente aninhada (nested)[15], significa que plantas especialistas (que interagem com poucos polinizadores) interagem com um subconjunto dos polinizadores que também visitam plantas generalistas. A modularidade significaria que a matriz pode ser dividida em blocos de espécies que interagem mais fortemente entre si do que com

espécies de outros módulos.

(A) Rede Aninhada (B) Rede Modular

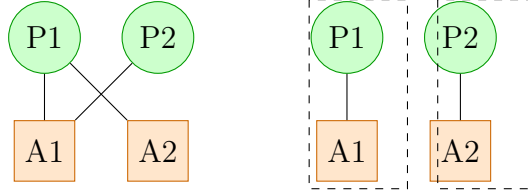


Figura 1: Padrões de redes mutualísticas: (A) rede aninhada e (B) rede modular

Na rede aninhada (Figura 1A), as interações seguem um padrão hierárquico. As espécies generalistas (como P1) interagem com a maioria das outras espécies, enquanto as espécies especialistas (como P2) interagem principalmente com as generalistas. Isso cria uma estrutura onde o conjunto de parceiros das espécies especialistas é um subconjunto dos parceiros das espécies generalistas. Essa estrutura é frequentemente encontrada em ecossistemas estáveis e é considerada robusta à extinção aleatória de espécies, pois a perda de um especialista tem pouco efeito na rede como um todo.

Na rede modular (Figura 1B), o sistema é compartimentalizado em grupos distintos (módulos). Dentro de cada módulo, as espécies interagem fortemente entre si, mas têm poucas ou nenhuma conexão com espécies de outros módulos. Essa estrutura pode surgir em resposta a barreiras geográficas, especializações fenológicas ou morfológicas. Redes modulares podem ser resilientes à propagação de perturbações (como uma doença), pois o efeito fica contido dentro de um módulo [15].

3 Resultados

3.0.1 Implementação do Modelo de Difusão-Reação

O código implementa um modelo de difusão-reação baseado na equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) \quad (13)$$

onde u representa a densidade populacional, D é o coeficiente de difusão, r : taxa de crescimento intrínseco, K : capacidade de suporte do ambiente

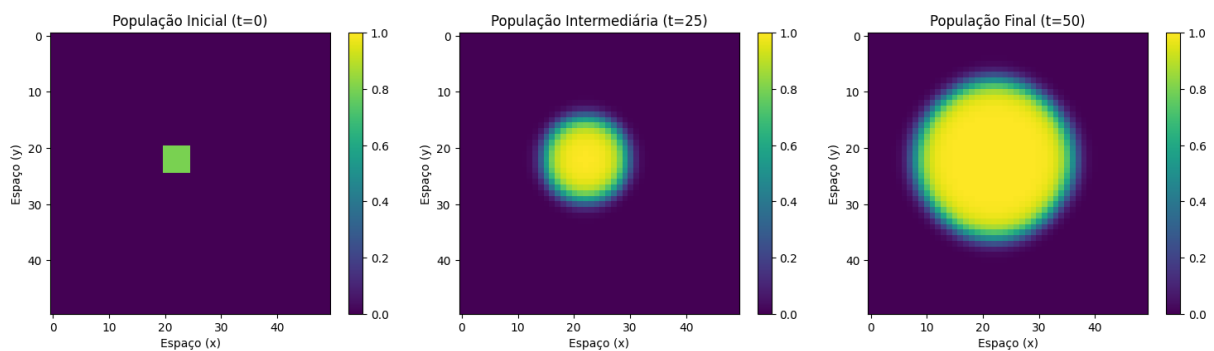


Figura 2: Dispersão da espécie ao longo do tempo.

```
1 !pip install matplotlib numpy scipy
2
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from matplotlib.animation import FuncAnimation
6 from IPython.display import HTML
7
8
9 print(" MODELO SIMPLES DE DIFUSÃO-REAÇÃO")
10 print("=" * 50)
11
12 class ModeloSimples:
13     """
14     Modelo básico de difusão-reação para distribuição de espécies
15     Equação:  u / t  = D *  u  + r * u * (1 - u/K)
16     """
17
```

```

18     def __init__(self):
19         self.tamanho = 50
20         self.D = 0.1      # Coeficiente de difusão
21         self.r = 0.3      # Taxa de crescimento
22         self.K = 1.0      # Capacidade de suporte
23
24     def criar_populacao_inicial(self):
25         """População inicial concentrada em uma região"""
26         u = np.zeros((self.tamanho, self.tamanho))
27         # População inicial no canto inferior esquerdo
28         u[20:25, 20:25] = 0.8
29         return u
30
31     def passo_difusao(self, u):
32         """Calcula a difusão (movimento da espécie)"""
33         # Laplaciano - difusão em 2D
34         laplaciano = (np.roll(u, 1, axis=0) + np.roll(u, -1, axis=0) +
35                       np.roll(u, 1, axis=1) + np.roll(u, -1, axis=1) - 4
36 * u)
37         return self.D * laplaciano
38
39     def passo_reacao(self, u):
40         """Calcula a reação (crescimento populacional)"""
41         # Crescimento logístico
42         return self.r * u * (1 - u / self.K)
43
44     def simular(self, passos=100):
45         """Executa a simulação"""
46         u = self.criar_populacao_inicial()
47         historico = [u.copy()]
48
49         for _ in range(passos):
50             # Equação de difusão-reação
51             du_dt = self.passo_difusao(u) + self.passo_reacao(u)
52             u += du_dt
53             u = np.clip(u, 0, self.K) # Evita valores negativos

```

```

54         historico.append(u.copy())
55
56         return historico
57
58     # Executa o modelo simples
59     print("          Executando simulação simples...")
60     modelo_simples = ModeloSimples()
61     resultado_simples = modelo_simples.simular(passos=50)
62
63     # Visualização simples
64     fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 4))
65
66     # População inicial
67     im1 = ax1.imshow(resultado_simples[0], cmap='viridis', vmin=0, vmax=1)
68     ax1.set_title('População Inicial (t=0)')
69     ax1.set_xlabel('Espaço (x)')
70     ax1.set_ylabel('Espaço (y)')
71     plt.colorbar(im1, ax=ax1)
72
73     # População intermediária
74     im2 = ax2.imshow(resultado_simples[25], cmap='viridis', vmin=0, vmax=1)
75     ax2.set_title('População Intermediária (t=25)')
76     ax2.set_xlabel('Espaço (x)')
77     ax2.set_ylabel('Espaço (y)')
78     plt.colorbar(im2, ax=ax2)
79
80     # População final
81     im3 = ax3.imshow(resultado_simples[-1], cmap='viridis', vmin=0, vmax=1)
82     ax3.set_title('População Final (t=50)')
83     ax3.set_xlabel('Espaço (x)')
84     ax3.set_ylabel('Espaço (y)')
85     plt.colorbar(im3, ax=ax3)
86
87     plt.tight_layout()
88     plt.show()
89
90     print("\n      Simulação simples concluída!")

```



```
91 print("      Observe a dispersão da espécie ao longo do tempo")
```

Listing 1: Implementação do modelo de difusão-reação para dispersão de espécies

3.0.2 Códigos Python dos modelos matemáticos

Do estudo sobre a cafeicultura do Sul de Minas pode ser feito algumas simulações sobre a variação da temperatura ao longo de 2 semanas. O modelo de produtividade implementado segue a estrutura proposta por [8] e [7], incorporando funções de resposta não-lineares à temperatura [14, 16] e estresse hídrico [6].

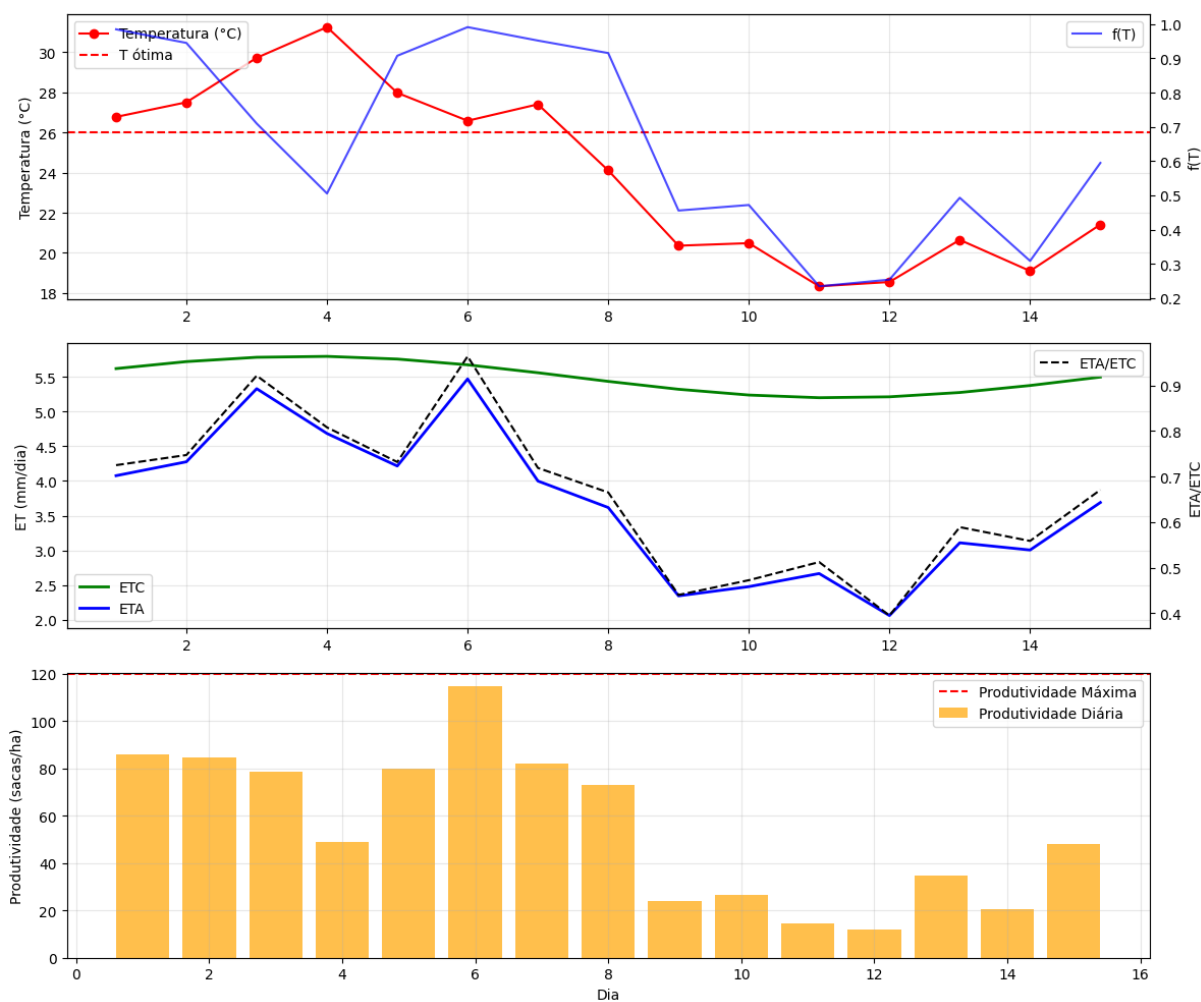


Figura 3: Modelo de dispersão da espécie ao longo do tempo.

RESUMO DA SIMULAÇÃO (15 dias):

Produtividade total acumulada: 828.3 sacas/ha

Produtividade média diária: 55.2 sacas/ha

Produtividade potencial máxima: 120 sacas/ha

Eficiência global do sistema: 46.0

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 """
3 Modelo de Produtividade Agricola com Resposta a Temperatura e Deficit
4   Hidrico
5
6 import numpy as np
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 from matplotlib import gridspec
9
10 class ModeloProdutividade:
11     """
12     Classe que implementa o modelo de produtividade agricola
13      $P = P_{max} * f(T) * g(ETC)$ 
14     """
15     def __init__(self, P_max, T_opt, T_tol):
16         """
17         Inicializa o modelo com parametros especificos
18
19         Args:
20             P_max (float): Produtividade potencial maxima (sacas/ha)
21             T_opt (float): Temperatura otima para a cultura ( C )
22             T_tol (float): Tolerancia a temperatura (desvio padrao da
23             gaussiana)
24         """
25         self.P_max = P_max
26         self.T_opt = T_opt
27         self.T_tol = T_tol
28
29     def f_T(self, temperatura):
30         """
31         Funcao de resposta a temperatura - Funcao Gaussiana
32          $f(T) = \exp(-0.5 * ((T - T_{opt}) / T_{tol})^2)$ 
33         """
```

```

33     Args:
34         temperatura (float ou array): Temperatura(s) em C
35
36     Returns:
37         float ou array: Fator de reducao por temperatura (0-1)
38     """
39     return np.exp(-0.5 * ((temperatura - self.T_opt) / self.T_tol)
40 ** 2)
41
42 def g_ETC(self, ETA, ETC):
43     """
44     Funcao de resposta hidrica
45     g(ETC) = ETA / ETC
46
47     Args:
48         ETA (float ou array): Evapotranspiracao Real
49         ETC (float ou array): Evapotranspiracao da Cultura
50
51     Returns:
52         float ou array: Fator de reducao hidrica (0-1)
53     """
54     # Garante que a razao nao ultrapasse 1 (sem estresse)
55     return np.minimum(ETA / ETC, 1.0)
56
57 def calcular_produtividade(self, temperatura, ETA, ETC):
58     """
59     Calcula a produtividade usando o modelo completo
60
61     Args:
62         temperatura (float ou array): Temperatura(s) em C
63         ETA (float ou array): Evapotranspiracao Real
64         ETC (float ou array): Evapotranspiracao da Cultura
65
66     Returns:
67         float ou array: Produtividade estimada (sacas/ha)
68     """
69     fator_temp = self.f_T(temperatura)

```

```

69         fator_hidrico = self.g_ETC(ETA, ETC)
70
71         return self.P_max * fator_temp * fator_hidrico
72
73     def visualizar_funcao_temperatura():
74         """Visualiza o comportamento da funcao de resposta a temperatura"""
75         print("=== ANALISE DA FUNCAO DE RESPOSTA A TEMPERATURA ===")
76
77         # Cria modelo exemplo para soja
78         modelo = ModeloProdutividade(P_max=80, T_opt=25, T_tol=5)
79
80         # Gama de temperaturas
81         temperaturas = np.linspace(10, 40, 100)
82         fator_temp = modelo.f_T(temperaturas)
83
84         plt.figure(figsize=(10, 6))
85         plt.plot(temperaturas, fator_temp, 'b-', linewidth=2, label='f(T)')
86         plt.axvline(x=modelo.T_opt, color='r', linestyle='--',
87                     label=f'Temperatura Otima ({modelo.T_opt} C)')
88         plt.axhline(y=0.5, color='g', linestyle='--',
89                     label='f(T) = 0.5 (Reducao de 50%)')
90
91         plt.xlabel('Temperatura ( C )')
92         plt.ylabel('Fator de Reducao f(T)')
93         plt.title('Funcao de Resposta a Temperatura - Comportamento
94                   Gaussiano')
95         plt.grid(True, alpha=0.3)
96         plt.legend()
97         plt.show()
98
99         # Calcula temperaturas onde f(T) = 0.5
100         idx_50 = np.where(fator_temp >= 0.5)[0]
101         T_min_efetiva = temperaturas[idx_50[0]]
102         T_max_efetiva = temperaturas[idx_50[-1]]
103
104         print(f"Temperatura otima: {modelo.T_opt} C ")
105         print(f"Faixa efetiva (f(T)      0.5): {T_min_efetiva:.1f} C a {

```

```

T_max_efetiva:.1f} C ")
105     print(f"Tolerancia termica (T_tol): {modelo.T_tol} C ")
106
107 def analisar_cenario_completo():
108     """Analisa um cenario completo de produtividade"""
109     print("\n=== ANALISE DE CENARIO COMPLETO ===")
110
111     # Parametros para cultura de soja
112     P_max = 75 # sacas/ha
113     T_opt = 25 # C
114     T_tol = 4 # C
115
116     modelo = ModeloProdutividade(P_max, T_opt, T_tol)
117
118     # Dados de exemplo para 5 dias
119     dias = np.array([1, 2, 3, 4, 5])
120     temperaturas = np.array([22, 26, 30, 18, 24]) # C
121     ETA = np.array([4.2, 4.8, 5.1, 3.5, 4.5]) # mm/dia
122     ETC = np.array([5.0, 5.0, 5.0, 5.0, 5.0]) # mm/dia
123
124     # Calculos
125     fator_temp = modelo.f_T(temperaturas)
126     fator_hidrico = modelo.g_ETC(ETA, ETC)
127     produtividade_diaria = modelo.calcular_produtividade(temperaturas,
128     ETA, ETC)
129
130     # Tabela de resultados
131     print("\nDia | Temp ( C ) | ETA/ETC | f(T) | Prod (sacas/ha)")
132     print("-" * 55)
133     for i in range(len(dias)):
134         print(f"{dias[i]:3} | {temperaturas[i]:9} | {ETA[i]/ETC[i]:7.2f}
135         | {fator_temp[i]:5.2f} | {produtividade_diaria[i]:15.2f}")
136
137     # Produtividade media do periodo
138     produtividade_media = np.mean(produtividade_diaria)
139     print(f"\nProdutividade media do periodo: {produtividade_media:.2f}
140     sacas/ha")

```

```

138     print(f"Produtividade potencial maxima: {P_max} sacas/ha")
139     print(f"Reducao total: {((P_max - produtividade_media)/P_max*100):.1
140     f}%")
141
142 def simulacao_sensibilidade():
143     """Simula a sensibilidade do modelo a diferentes fatores"""
144     print("\n=== ANALISE DE SENSIBILIDADE ===")
145
146     # Configuracao base
147     modelo_base = ModeloProdutividade(P_max=70, T_opt=24, T_tol=4)
148
149     # Cenarios de temperatura
150     temp_cenarios = np.linspace(15, 35, 50)
151
152     # Diferentes condicoes hidricas
153     condicoes_hidricas = {
154         'Ideal (ETA/ETC=1.0)': 1.0,
155         'Leve estresse (ETA/ETC=0.8)': 0.8,
156         'Moderado estresse (ETA/ETC=0.6)': 0.6,
157         'Severo estresse (ETA/ETC=0.4)': 0.4
158     }
159
160     plt.figure(figsize=(12, 8))
161
162     for condicao, fator_hidrico in condicoes_hidricas.items():
163         produtividade = modelo_base.calcular_produtividade(
164             temp_cenarios,
165             fator_hidrico * 5.0, # ETA = fator_hidrico * ETC
166             5.0 # ETC fixo
167         )
168         plt.plot(temp_cenarios, produtividade,
169                 label=condicao, linewidth=2)
170
171     plt.xlabel('Temperatura ( C )')
172     plt.ylabel('Produtividade (sacas/ha)')
173     plt.title('Sensibilidade do Modelo: Temperatura vs Condições
174     Hidricas')

```

```

173     plt.grid(True, alpha=0.3)
174     plt.legend()
175     plt.show()
176
177 def exemplo_aplicacao_real():
178     """Exemplo de aplicacao com dados mais realistas"""
179     print("\n=== EXEMPLO DE APLICACAO PRATICA ===")
180
181     # Parametros para milho
182     modelo_milho = ModeloProdutividade(
183         P_max=120,    # sacas/ha
184         T_opt=26,     # C
185         T_tol=4.5     # C
186     )
187
188     # Simulacao para uma quinzena (15 dias)
189     dias = np.arange(1, 16)
190
191     # Dados simulados mais realistas
192     np.random.seed(42) # Para reproducibilidade
193     temperaturas = 24 + 5 * np.sin(2 * np.pi * dias / 15) + np.random.
194     normal(0, 1.5, 15)
195     ETC = 5.5 + 0.3 * np.sin(2 * np.pi * dias / 15) # Variacao sazonal
196     da ETC
197     ETA = ETC * np.clip(0.7 + 0.2 * np.sin(2 * np.pi * dias / 15) + np.
198     random.normal(0, 0.1, 15), 0.3, 1.0)
199
200     # Calculos
201     resultados = []
202     for i in range(len(dias)):
203         prod = modelo_milho.calcular_produtividade(
204             temperaturas[i], ETA[i], ETC[i]
205         )
206         resultados.append({
207             'dia': dias[i],
208             'temp': temperaturas[i],
209             'ETA_ETC': ETA[i]/ETC[i],

```

```

207         'f_T': modelo_milho.f_T(temperaturas[i]),
208         'produtividade': prod
209     })
210
211 # Plot resultados
212 fig, (ax1, ax2, ax3) = plt.subplots(3, 1, figsize=(12, 10))
213
214 # Grafico 1: Temperatura e f(T)
215 ax1.plot(dias, temperaturas, 'ro-', label='Temperatura ( C )')
216 ax1.axhline(y=modelo_milho.T_opt, color='r', linestyle='--', label='
T otima')
217 ax1.set_ylabel('Temperatura ( C )')
218 ax1.legend(loc='upper left')
219 ax1.grid(True, alpha=0.3)
220
221 ax1_twin = ax1.twinx()
222 ax1_twin.plot(dias, [r['f_T'] for r in resultados], 'b-',
223               label='f(T)', alpha=0.7)
224 ax1_twin.set_ylabel('f(T)')
225 ax1_twin.legend(loc='upper right')
226
227 # Grafico 2: Condicoes hidricas
228 ax2.plot(dias, ETC, 'g-', label='ETC', linewidth=2)
229 ax2.plot(dias, ETA, 'b-', label='ETA', linewidth=2)
230 ax2.set_ylabel('ET (mm/dia)')
231 ax2.legend()
232 ax2.grid(True, alpha=0.3)
233
234 ax2_twin = ax2.twinx()
235 ax2_twin.plot(dias, [r['ETA_ETC'] for r in resultados], 'k--',
236               label='ETA/ETC')
237 ax2_twin.set_ylabel('ETA/ETC')
238 ax2_twin.legend()
239
240 # Grafico 3: Produtividade
241 ax3.bar(dias, [r['produtividade'] for r in resultados],
242         alpha=0.7, color='orange', label='Produtividade Diaria')

```



```

243     ax3.axhline(y=modelo_milho.P_max, color='red', linestyle='--',
244                 label='Produtividade Maxima')
245     ax3.set_xlabel('Dia')
246     ax3.set_ylabel('Produtividade (sacas/ha)')
247     ax3.legend()
248     ax3.grid(True, alpha=0.3)
249
250     plt.tight_layout()
251     plt.show()
252
253     # Estatisticas finais
254     prod_total = sum([r['produtividade'] for r in resultados])
255     prod_media = prod_total / len(dias)
256
257     print(f"\nRESUMO DA SIMULACAO (15 dias):")
258     print(f"Produtividade total acumulada: {prod_total:.1f} sacas/ha")
259     print(f"Produtividade media diaria: {prod_media:.1f} sacas/ha")
260     print(f"Produtividade potencial maxima: {modelo_milho.P_max} sacas/
ha")
261     print(f"Eficiencia global do sistema: {(prod_media/modelo_milho.
P_max*100):.1f}%")
262
263     def main():
264         """Funcao principal que executa todas as analises"""
265         print("""
266         MODELO DE PRODUTIVIDADE AGRICOLA
267         =====
268         Equacao:  $P = P_{max} * f(T) * g(ETC)$ 
269         Onde:
270         - P_max: Produtividade potencial maxima
271         - f(T): Funcao Gaussiana de resposta a temperatura
272         - g(ETC): Razao ETA/ETC (resposta hidrica)
273         """)
274
275         # Executa todas as analises
276         visualizar_funcao_temperatura()
277         analisar_cenario_completo()

```

```

278     simulacao_sensibilidade()
279     exemplo_aplicacao_real()
280
281
282 # Executa o programa principal
283 if __name__ == "__main__":
284     main()

```

Listing 2: Implementação do modelo de produtividade agrícola com resposta à temperatura e déficit hídrico

onde P_{max} é a produtividade potencial máxima (70-120 sacas/ha), T_{opt} é a temperatura ótima (24-26°C), T_{tol} é a tolerância térmica (4-5°C), ETA é a evapotranspiração real (3-6 mm/dia) e ETC é a evapotranspiração da cultura (5-6 mm/dia).

3.0.3 Implementação do Modelo de lucro 3D em função da Temperatura vs Umidade

$$L(t) = p \cdot P(T, W) - c \cdot E - A(T) \quad (14)$$

p : preço por saca de café, $P(T, W)$ é a produtividade em função da temperatura e umidade, c é o custo unitário do esforço de produção, E se refere ao esforço de produção, $A(T)$ são os custos de adaptação à temperatura

O código implementa uma análise bidimensional do lucro agrícola considerando o grid de variáveis e cria uma malha de temperaturas (16-32°C) e condições hídricas (ETA/ETC de 0.3-1.0), o cálculo do lucro calcula o lucro para cada combinação temperatura-umidade. A visualização 3D mostra a Superfície tridimensional com a relação entre variáveis. O mapa de contorno mostra uma visualização 2D com curvas de nível do lucro, o ponto ótimo mostra a identificação da combinação ideal de temperatura e umidade.

Para fins de visualização, foi fixado a temperatura na Faixa de 16°C a 32°C (50 pontos), condições hídricas em ETA/ETC de 0.3 (seco) a 1.0 (ideal), as cores vermelho-amarelo-verde para representam o lucro, ponto ótimo é 22°C com $ETA/ETC = 1.0$, linha de equilíbrio com a curva de nível em lucro = 0 (preto)

A função gera dois gráficos, um gráfico 3D com a superfície do lucro em função da tem-

peratura e umidade e um mapa 2D com curvas de nível com destaque para a região de lucro máximo. A barra de cores mostra a escala de valores do lucro em R\$/ha. A Região Verde mostra a alta lucratividade em condições ótimas, a região amarela a lucratividade moderada, a região vermelha, baixa ou negativa lucratividade, a linha preta o ponto de equilíbrio com lucro zero e o ponto vermelho as condições ideais para maximização do lucro.

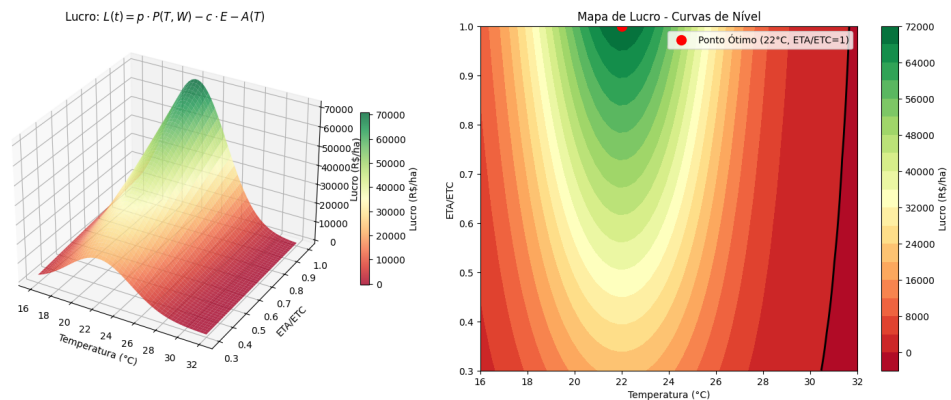


Figura 4: Análise do lucro em função da temperatura e condições hídricas

```

1 # Celula 4: Grafico 2 - Lucro 3D (Temperatura vs Umidade)
2
3 def plot_lucro_3d():
4     fig = plt.figure(figsize=(15, 6))
5
6     # Criar grid de temperaturas e condicoes hidricas
7     T = np.linspace(16, 32, 50)
8     W = np.linspace(0.3, 1.0, 50) # ETA/ETC de 0.3 a 1.0
9     T_grid, W_grid = np.meshgrid(T, W)
10
11     # Calcular lucro para cada combinacao
12     Lucro_grid = np.zeros_like(T_grid)
13     for i in range(len(T)):
14         for j in range(len(W)):
15             Lucro_grid[j,i] = lucro(T_grid[j,i], W_grid[j,i])
16
17     # Plot 3D
18     ax = fig.add_subplot(121, projection='3d')
19     surf = ax.plot_surface(T_grid, W_grid, Lucro_grid,

```

```

20         cmap='RdYlGn', alpha=0.8,
21         linewidth=0, antialiased=True)
22
23     ax.set_xlabel('Temperatura ( C )')
24     ax.set_ylabel('ETA/ETC')
25     ax.set_zlabel('Lucro (R\$/ha)')
26     ax.set_title('Lucro:  $L(t) = p \cdot P(T,W) - c \cdot E - A(T)$ ')
27
28     # Adicionar barra de cores
29     fig.colorbar(surf, ax=ax, shrink=0.5, aspect=20,
30                 label='Lucro (R\$/ha)')
31
32     # Plot de contorno 2D
33     ax2 = fig.add_subplot(122)
34     contour = ax2.contourf(T_grid, W_grid, Lucro_grid,
35                            levels=20, cmap='RdYlGn')
36     ax2.contour(T_grid, W_grid, Lucro_grid, levels=[0],
37                colors='black', linewidths=2)
38
39     # Marcar ponto otimo
40     ax2.plot(22, 1.0, 'ro', markersize=10,
41             label='Ponto Otimo (22 C , ETA/ETC=1)')
42
43     ax2.set_xlabel('Temperatura ( C )')
44     ax2.set_ylabel('ETA/ETC')
45     ax2.set_title('Mapa de Lucro - Curvas de Nivel')
46     ax2.legend()
47     fig.colorbar(contour, ax=ax2, label='Lucro (R\$/ha)')
48
49     plt.tight_layout()
50     plt.show()
51
52     return fig
53
54 # Executar o grafico 3D
55 fig2 = plot_lucro_3d()

```

Listing 3: Análise tridimensional do lucro em função da temperatura e disponibilidade

hídrica

4 Conclusão

Sobre a região do Sul de Minas pode-se ver claramente o efeito do clima e disponibilidade água, que são consequência das mudanças climáticas, afetando a produtividade do café.

Planeja-se trabalhar num modelo de projeção de cenários representando uma abordagem matemática para antecipar os impactos das mudanças climáticas na cafeicultura, em que o sistema cafeicultor envolve produtividade, esforço de produção e lucro e como interagem com variáveis ambientais além da temperatura/ disponibilidade hídrica atuando como forçantes externas que perturbam esse sistema ao longo do tempo. Além disso será adicionado os custos totais, que incluem tanto os custos operacionais convencionais quanto os crescentes custos de adaptação às condições climáticas adversas, estes últimos representam investimentos em irrigação suplementar, sombreamento, manejo especializado e outras estratégias de mitigação.

É de bom tamanho também estudar um modelo para determinar se é mais vantajoso investir em estratégias de redução de temperatura ou em eficiência hídrica em diferentes fases da trajetória climática.

Pretende-se estudar como funciona a cadeia de produção, entender todo ecossistema do ciclo do café a fim de modelar políticas compensatórias para perdas climáticas, o quanto é perdido ao longo dos anos, seja por custos de adaptação ou queda do lucro da cafeicultura.

Na questão da dinâmica de populações dos polinizadores e segurança alimentar, pretende-se estudar mais a fundo sobre o tema simulando como perturbações externas, pesticidas ou perda de habitat e como afetam a estabilidade da rede de polinização e consequentemente, a produtividade agrícola com estudos quantitativos sobre essa dinâmica em alimentos específicos que realmente tenha valor agregado e causem impacto na cadeia de produção no país, como por exemplo, no oeste da Bahia com itens como cacau, café, banana, mamão ou coco, podendo até mesmo integrar com o segundo tema pesquisado.

Referências

- [1] Emanuelle Brito. Como a conservação de polinizadores pode promover a segurança alimentar, 2023.
- [2] Guilherme Leite Nunes Coelho, Luis Marcelo Tavares de Carvalho, and Lucas Rezende Gomide. Modelagem preditiva de distribuição de espécies pioneiras no estado de minas gerais. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 2025. Acessado em: 2025-11-07.
- [3] Valéria Cristina Costa. Café canéfora tem zoneamento de risco climático atualizado. EMBRAPA, 03 2024. Acessado em: 2025-11-07.
- [4] Valéria Cristina Costa. Café canéfora tem zoneamento de risco climático atualizado. EMBRAPA, 03 2024. Acessado em: 2025-11-07.
- [5] Valéria Cristina Costa. Faturamento da cafeicultura brasileira. EMBRAPA, 2024. Acessado em: 2025-11-07.
- [6] J Doorenbos and WO Pruitt. Guidelines for predicting crop water requirements. *FAO Irrigation and drainage paper*, 24:1–144, 1977.
- [7] David B Lobell and Gregory P Asner. Climate and management contributions to recent trends in us agricultural yields. *Science*, 299(5609):1032–1032, 2003.
- [8] John L Monteith. Climate and the efficiency of crop production in britain. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. B, Biological Sciences*, 281(980):277–294, 1977.
- [9] J.D. Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, New York, 3rd edition, 2002.
- [10] Nações Unidas. Causas e efeitos das mudanças climáticas. Nações Unidas, 2025. Acessado em: 2025-11-07.
- [11] Parlamento Europeu. Porque estão a desaparecer as abelhas e os polinizadores? (infografia), 2019.

- [12] Projeto Especial - ESG. Como as abelhas ajudam a agregar 43 bilhões por ano a agricultura brasileira, 2021.
- [13] Talita Soares Reis. Dinâmica regional de populações de plantas: abordagens e perspectivas. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2009. Acessado em: 2025-11-07.
- [14] Wolfram Schlenker and Michael J Roberts. Nonlinear temperature effects indicate severe damages to us crop yields under climate change. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(37):15594–15598, 2009.
- [15] Carlos H Vergara and Ernesto I Badano. Pollinator diversity increases fruit production in mexican coffee plantations: The importance of rustic management systems. *Agriculture, Ecosystems & Environment*, 129(1-3):117–123, 2009.
- [16] Xinyou Yin, Martin J Kropff, Graham McLaren, and Romeo M Visperas. A nonlinear model for crop development as a function of temperature. *Agricultural and Forest Meteorology*, 77(1-2):1–16, 1995.